TÜBİTAK

Sonuç Raporu

Kapsadığı Dönem – 15/10/2017 – 15/01/2019

Araştırmanın Başlığı: Karmaşık analitik yüzeyler arasındaki meromorfik fonksiyonların lokal olarak genişletilmesi ve karmaşık polinom otomorfizmalarının dinamiklerinin incelenmesi

Adayın Adı Soyadı:	Özcan Yazıcı
Telefon No:	0312 210 5387
Cep No:	0545 814 5606
E-mail Adresi:	oyazici@metu.edu.tr
Danışmanın Adı Soyadı	İbrahim Ünal
Telefon No:	0312 210 5380
Cep No:	0546 525 5020
E-mail Adresi:	iunal@metu.edu.tr

ÖY İ.Ü.

1.) Araştırma Konusu

Bu matematik araştırma projesinde, çok değişkenli karmaşık analizin ve dinamik sistemlerin bazı problemleri incelenmektedir. Araştırmanın birinci kısmı, çok değişkenli karmaşık uzayda tanımlı meromorfik fonksiyonların bazı koşullar altında holomorfik olarak genişletilmesi problemi üzerinde yoğunlaşmaktadır. Forstneric [F], bir birim kürenin içinden başka bir birim kürenin içine giden proper, holomorfik fonksiyonların rasyonel (meromorfik) olması gerektiğini göstermiştir. Sonrasında Cima-Suffridge [CS] ve Chiappari [Ch] bu tür fonksiyonların küre üzerinde tekilliklerinin (poles) olamayacağını, yani kürenin bir komşuluğuna holomorfik olarak genişletilebileceklerini göstermişlerdir. Bu araştırma projesinde küre yerine daha genel reel analitik hiperyüzeyler (hypersurfaces) arasındaki rasyonel fonksiyonların hiperyüzeyin bir tarafından diğer tarafına holomorfik olarak genişletilmesi problemi incelenmektedir. Bu problem, reel analitik hiperyüzeyin bir tarafında holomorfik olan fonksiyonların sınıflandırılmasıyla ilgili olduğundan oldukça ilginç ve önemli bir problemdir.

Diğer bir problem olarak, çok değişkenli karmaşık polinomların dinamiği incelenmektedir. Bu polinomları kullanarak değişmez (invaryant) ölçümler oluşturulması üzerine çalışılmıştır. Bu ölçümlerin ergodik teoride birçok uygulaması olduğu bilinmektedir. Ayrıca karmaşık dinamik yöntemleri son yıllarda matematiksel biyoloji, fizik ve astronomideki kaotik yapıların anlaşılmasına yardımcı olmuştur.

2.) Rapor Döneminde Yapılan Çalışmalar

2.1 Birinci Rapor Döneminde Yapılan Çalışmalar

1. rapor döneminde (15.10.2017-15.04.2018) farklı boyutlu reel analitik hiperyüzeyler (hypersurfaces) arasındaki meromorfik fonksiyonların holomorfik olarak genişletilmesi problemi üzerinde çalışılmıştır. Literatür çalışması olarak Cima ve Suffridge'in [CS] ve S. Chiappari'nin [Ch] makaleleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Özel bir durum olarak, küreler arasında tanımlı

Ö.Y İ.Ü.

ve kürenin bir tarafında analitik olan bir meromorfik fonksiyonun, kürenin diğer tarafına da analitik olarak genişletilebileceği sonucu Cima ve Suffridge'in yukarıda bahsedilen makalesinde ispatlanmıştır.

Birinci rapor döneminde yukarıda belirtilen sonucun kürelerden daha genel reel analitik yüzeylere genellemesi üzerine çalışılmıştır. Bu bağlamda, herhangi bir reel analitik hiperyüzeyin bir tarafında analitik olan ve bu hiperyüzeyi başka bir güçlü yarı-konveks (strongly pseudoconvex) hiperyüzeye götüren meromorfik bir fonksiyonun hiperyüzeyin diğer tarafına da lokal analitik olarak genişletilebilirliliği üzerine çalışılmıştır. Litaratürde bulunan çalışmaların tamamında görüntü kümesindeki hiperyüzey küre olarak alınmış ve bu tür meromorfik fonksiyonların analitik olarak genişletilebildiği gösterilmiştir. Birinci çalışma döneminde görüntü kümesindeki küreyi özel bir güçlü yarı-konveks hiperyüzey sınıfı ((3.1.1) de bu tip hiperyüzeylerin açık tanımı yapılacak) ile değiştirdiğimizde analitik genişletilebilirliğin varlığı gösterilmiştir. Bu sonuç her ne kadar küreler için elde edilen genişletilebilirlik sonuçlarını daha geniş bir özel hiperyüzey sınıfı için genelleştirse de, görüntü kümesinde herhangi bir güçlü yarı-konveks hiperyüzey olduğunda genişletilebilirliğin varlığı bilinmemektedir. Örneğin görüntü kümesinde güçlü yarı-konveks reel cebirsel bir hiperyüzey (reel değerli bir polinomla tanımlı bir hiperyüzey) aldığımızda meromorfik fonksiyonların genişletibilirliği hakkında literatürde daha önce yapılmış bir çalışma bulunmamaktadır.

2.2 İkinci (Son) Rapor Döneminde Yapılan Çalışmalar

Bu çalışmaya 2. rapor döneminde de devam edilip güçlü yarı-konveks reel cebirsel hiperyüzeyler için benzer bir genişletilebilirlik sonucu elde edilmiştir. Daha ayrıntılı anlatmak gerekirse, görüntü kümesindeki M' hiperyüzeyinin lokal olarak

$$Imz'_N = p'(z', \bar{z}')$$

denklemiyle tanımlandığı durumda, belli ozellikleri sağlayan herhangi bir $F : M \to M'$ meromorfik fonksiyonunun holomorfik olarak genişletilebilirliği gösterilmiştir. Buradaki M' yi tanımlayan p' fonksiyonu reel değerli

Ö.Y İ.Ü.

herhangi bir polinomdur. p' nin, dolayısıyla M' nin herhangi bir küresel simetri özelliği sağlaması gerekmediğinden, bu sonuç literatürde yapılan ve bir önceki dönem elde edilen sonuçlardan farklıdır. Elde edilen sonuç makale [Y2] olarak yazılarak, yayınlanmak üzere uluslararası bir dergiye gönderilmiştir ve hakem değerlendirme aşamasındadır. (Bkz. [Ek 1])

Bu rapor döneminde diğer bir problem olarak polinom otomorfizmalarının dinamikleri incelenmiştir. $\mathbb{C}^3$ ün otomorfizmaları 5 farklı sınıftan oluşmaktadır. [CF] de, bu sınıflardaki otomorfizmalar için *Green* fonksiyonları oluşturulmuş ve bunlar kullanılarak orbitlerin sonsuzda davranışları incelenmiştir. Bu projede, $\mathbb{C}^3$ ün bazı otomorfizmaları için değişmez ölçümler bulunmuştur. Bu değismez ölçümlerin entropileri hesaplanıp ((3.1.2) de detaylı olarak açıklanacak) bu entropilerin maksimal olup olmadığı incelenmiştir. Maksimal entropiyi veren ölçümler ergodik teori çalışmalarında büyük öneme sahiptir. Bu çalışma, proje süresinin, başvuruda sunulan 24 ay yerine 15 ay olarak belirlenmesi sebebiyle henüz tamamlanmamıştır. Dolayısıyla bir süre daha bu problem üzerinde çalışılıp, elde edilecek sonuçlar yayınlanmak üzere bir dergiye gönderilecektir.

3.) Araştırma Sonuçları ve Çıktılar

3.1 Sonuçlar

3.1.1 Holomorfik Genişletilebilirlik Problemi

$p(z)$ ve $p'(z)$ reel analitik fonksiyonlar ve

$$M = \{z \in \mathbb{C}^n : p(z) = 0\},\ M' = \{z \in \mathbb{C}^N : p'(z) = 0\}$$

olmak üzere 2 hiperyüzey alalım. Eğer M' hiperyüzeyini tanımlayan $p'(z)$ fonksiyonu güçlü yarı-konveks (strongly pseudoconveks) ise (yani $p'(z)$ nin kompleks Hessian matrisi olan $\left[\frac{\partial^2 p'(z)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right]_{1\leq i,j\leq N}$ her $z \in M$ için pozitif definit ise), M' hiperyüzeyine güçlü yarı-konveks hiperyüzey (strongly pseudoconveks hypersurface) denir.

Ö.Y İ.Ü.

Bu durumda reel analitik $p'(z)$ fonksiyonu koordinat değişimi yapılarak şu formda yazılabilir:

$$p'(z) = Imz_N - \sum_{j=1}^{N-1} |z_j|^2 + \phi(z).$$

Burada $\phi(z) = O(|z|^3)$, yani $\frac{\phi(z)}{|z|^3}$ sıfırın etrafında sınırlı olan herhangi bir reel analitik fonksiyondur.

$p \in M$ ve f, z_0 noktasının bir komşuluğunda meromorfik, hiperyüzeyin bir tarafı olan $M^+ = \{z \in \mathbb{C}^n : p(z) > 0\}$ bölgesi üzerinde holomorfik ve $f(M) \subset M'$ yi sağlayan bir fonksiyon olsun. Eger M' hiperyüzeyini tanımlayan $p'(z)$ fonksiyonunda $\phi(z) \equiv 0$ alırsak, M' hiperyüzeyi $\mathbb{C}^N$ deki reel küreye eştir. Bu özel durumda Cima-Suffridge [CS], f meromorfik fonksiyonunun z_0 noktasına holomorfik genişlemesinin olduğunu göstermiştir.

İlk çalışma döneminde görüntü kümesindeki M' hiperyüzeyinin tanımındaki ϕ fonksiyonu

$$\phi(\lambda z) = |\lambda|^d \phi(z)$$

(d>2) özelliğini sağladığında, yukarıdaki gibi verilen, z_0 noktası etrafındaki meromorfik bir f fonksiyonunun, z_0 noktasına holomorfik olarak genişletilebileceği gösterilmiştir.

İkinci (son) çalışma döneminde ise $\phi(z)$ nin yukarıdaki gibi homojenlik özelliği sağlamadığı daha genel durumlar için benzer holomorfik genişletilebilirlik problemi üzerinde çalışılmıştır. Bu bağlamda, $\phi(z)$ fonksiyonu, reel değerli herhangi bir polinom olarak alındığında, z_0 noktası etrafındaki f meromorfik fonksiyonunun z_0 a holomorfik genişlemesi olduğu gösterilmiştir. Bu sonuç, ϕ nin, dolayısıyla M' hiperyüzyenin herhangi bir simetri özelliği taşımadığı durumlarda da, f nin holomorfik genişlemesinin varlığını göstermesi nedeniyle önemlidir. Meroforfik fonksiyonların analitik olarak genişletilebilmesi ile ilgili elde edilen sonuçlar, araştırmacı tarafından, 2019 un Şubat ayında, ODTÜ Matematik Bölümü Genel Seminerler ve Bilkent Üniversitesi Analiz Seminerleri kapsamında sunulacaktır.

Ö.Y. İ.Ü.

3.1.2 Polinom Otomorfizmalarının Dinamikleri

İkinci çalışma döneminde, bir diğer problem olarak, $\mathbb{C}^3$ ün polinom otomorfizmalarının dinamikleri incelenmiştir. $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ birebir bir polinom ve μ bir olasılık ölçüsü (probability measure) olsun. $\mathbb{C}^3$ ün bir partisyonu (partition) olarak $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ alalım. Bu partisyonun f altındaki ters imajı olarak

$$\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathcal{A} := \{\mathcal{A}, f^{-1}\mathcal{A}, \ldots, f^{-n+1}\mathcal{A}\}$$

ve $H(\mathcal{A}) := -\sum_{i=1}^{k} \mu(A_i) \log \mu(A_i)$ tanımlayalım.

$$h_\mu(\mathcal{A}, f) = \lim_n \frac{1}{n} H(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathcal{A})$$

olmak üzere, μ ölçüsünün f ye göre entropisi

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{A}} h(\mathcal{A}, f)$$

olarak tanımlanır.

Bir başka entropi çeşidi olarak Hacim Entropisini (Volume Entropy) tanımlayalım. $\rho_j := \int_{\mathbb{C}^k} f^*(\omega^j) \wedge \omega^{k-j}$, ω-Fubini-Study form olmak üzere Hacim Entropisi

$$H(f) = \liminf_{n\to\infty} \max_{1\le j\le k} \frac{\log \rho_j(f^n)}{n}$$

olarak tanımlanır.
$H(f) \geq \sup_\mu h_\mu(f)$ eşitsizliği bilinmektedir.

$$H(f) = h_\mu(f)$$

eşitliğini sağlayan (eğer varsa) bir μ ölçüsüne *maksimal entropisi olan ölçü* denilir.

Bu çalışma döneminde, $\mathbb{C}^3$ ün otomorfizmaları için maksimal entropiyi veren değişmez ölçümler ($H^*\mu = \mu$) elde edilmesi amaçlanmıştır.

ÖY İ.Ü.

$\mathbb{C}^3$ ün otomorfizmaları H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 olmak üzere 5 sınıfa ayrılıp bu sınıfların dinamikleri [CF] de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

H_1 sınıfı, $H_1(x,y,z) = (P(x,y)+ay, Q(z)+x, cz+d)$, $degP = degQ = 2$, formundaki polinomlardan oluşmaktadır. Bu sınıftaki polinomlar için Hacim entropisinin $\log 2$ ye eşit olduğunu gösterdik. [CF] de Green fonksiyonları kullanılarak değişmez bir μ ölçümü oluşturulmuştur. Bu ölçümün entropisinin $\log 2$ ye eşit olduğunu gösterdik. Yani, bu ölçüm maksimal entropiyi veren değişmez bir ölçümdür.

Benzer şekilde $H_2(x,y,z) = (P(y,z) + ax, Q(y) + bz, y)$ formundaki otomorfizmalar için Hacim entropisini $\log 2$ olarak hesapladık ve [CF] de tanımlanan ölçümün maksimal entropiyi verdiğini gösterdik.

$H_3(x,y,z) = (P(x,z)+ay, Q(x)+z, x)$ formundaki otomorfizmalar için [CF] de değişmez μ^+, μ^-, $(1,1)$ Green current ları tanımlanmıştır. Bunları kullanarak $\mu_n := \mu^+ \wedge \mu^- \wedge dd^c \log ||H_3^n(z)||$ ölçümlerini tanımladık ve bu ölçümlerin değişmez bir olasılık ölçümü μ ye zayıf olarak yakınsadığını gösterdik.

[CF] de $\{H_3^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ orbitlerinin sonsuza yavaş olarak gittiği ya da sınırlı olduğu noktalar kümesi olarak K^+ tanımlanmıştır. H_3 polinomunun katsayılarının bazı eşitsizlikleri sağladığı özel durumlarda, orbitlerin sınırlı olduğu, K^+ nın değişmez bir altkümesi tanımladık. Bu tür değişmez altkümeler μ değişmez ölçümünün entropisini incelelerken kolaylık sağlamaktadır.

H_4 ve H_5 sınıflarındaki polinomlar için değişmez ölçüler sırasıyla [C] ve [Y] da incelenmiştir.

Polinom otomorfizmalarının dinamikleriyle ilgili elde edilen sonuçların bir kısmı 3 Şubat 2019 tarihinde TMD Ankara Şubesinin 1. Çalıştayında araştırmacı tarafından sunulmuştur.

Ö.Y. İ.Ü.

3.2 Çıktılar

Makale:

1. Holomorphic extension of meromorphic mappings along real analytic hypersurfaces, (*Hakem Sürecinde*)

2. Invariant measures for polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^3$ (*Hazırlık aşamasında*)

4.) Araştırma Çalışmasının Yürütülmesi ile İlgili Karşılaşılan Güçlükler

Analitik genişletilebilirlik problemiyle ilgili daha önce yapılan çalışmalarda hiperyüzeyler küre olarak alınmış ve küre denkleminin homojen olması ($p(\lambda z) = |\lambda|^2 p(z)$) sonuca ulaşmakta önemli bir rol oynamıştır. Örneğin Cima-Suffridge'in sonucuna bakacak olursak, $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ meromorfik fonksiyonu bir M hiperyüzeyini birim küreye

$$S^{N-1} = \{z \in \mathbb{C}^N : |z_1|^2 + ... + |z_N|^2 = 1\}$$

gönderiyorsa, her $z \in M$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$||h(z)||^2 - |g(z)|^2 = 0. \qquad (1)$$

Eğer her $z \in M$ için $g(z) \neq 0$ ise f analitik bir fonksiyon tanımlar ve böylece aradığımız genişlemeyi elde etmiş oluruz.

Eğer bir $z_0 \in M$ için $g(z_0) = 0$ ise Weierstrass preparation teoremini kullanarak, $U(z)$ bir Weierstrass polinomu olmak üzere

$$h(z) = U(z)d(z) + r(z), \quad g(z) = U(z)q(z)$$

olarak yazabiliriz. Burada $r(z)$ derecesi $U(z)$ nin derecesinden küçük bir Weierstrass polinomu, $d(z)$ ve $q(z)$, z_0 etrafında analitik fonksiyonlar öyle ki $d(z_0) \neq 0$ ve $q(z_0) \neq 0$. Yukarıdaki (1) denklemini U, d, q, r cinsinden yazıp Weierstrass polinomu olan U nun derecesi üzerinden cebirsel bir manipülasyon yaparak $r(z) \equiv 0$ elde edilir. Bu da $q(z_0) \neq 0$ olduğundan $f(z) = \frac{d(z)}{q(z)}$ analitik genişlemesini verir.

Ö.Y. İ.Ü.

Küre denklemini (3.1.1) de bahsettiğimiz gibi

$$Imz_N - \sum_{j=1}^{N-1} |z_j|^2 = 0$$

formunda yazarak da yukarıdakine benzer bir şekilde aynı genişleme sonucunu elde edebiliriz. Bu da bize yukarıdaki gibi bir ispatın

$$M' = \{z \in \mathbb{C}^3 : p'(z) = Imz_N - \sum_{j=1}^{N-1} |z_j|^2 + \phi(z) = 0\}$$

formundaki daha genel hiperyüzeyler için sonuç verebileceği fikrini vermiştir. Ancak (1) deki gibi bir denklemi bu genel hiperyüzey denklemini kullanarak yazdığımızda $\phi(f) = \phi(h/g)$ nin analitik olmaması nedeniyle yukarıdaki gibi bir Weierstrass polinomu argümanının kulanılamaması araştırma sırasında karşılaşılan bir güçlük olarak görülebilir.

Bu araştırma döneminde ϕ olarak reel değerli derecesi $d > 2$ olan herhangi bir polinom alınmıştır. Bu durumda $g(z) = U(z)q(z)$ ve $q(z_0) \neq 0$ olduğundan $U(z)^d\phi\left(\frac{h(z)}{g(z)}\right)$, z_0 ın etrafında holomorfik bir fonksiyon olur ve M' nin yukarıdaki formu kullanılarak (1) dekine benzer bir denklem elde edebiliriz. Bu denklemi kullanarak $r(z) \equiv 0$ olduğunu ve dolayısıyla f nin z_0 noktasına holomorfik genişlemesinin olduğunu gösterebildik.

Bu sonuç, holomorfik genişletilebilirlik probleminin, görüntü kümesindeki M' nin hiçbir simetri özelliği sağlamayan cebirsel bir hiperyüzey olması durumunda da çözümünün olduğunu göstermesi nedeniyle önemlidir.

Araştırmanın diğer bir problemi olarak $\mathbb{C}^3$ polinom otomorfizmaları için değişmez ölçümler bulunup bunların entropilerinin incelenmesi üzerinde çalışılmıştır. Bir $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ polinom otomorfizması, kompleks projektif uzaya, polinomlar bir koordinat yardımıyla homojen yapılarak $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ şeklinde meromorfik olarak genişletilebilir.

Ö.Y. İ.Ü.

Bu genişlemenin tanımlı olmadığı kümelere f nin *indeterminacy* kümesi denir ve I^+ ile gösterilir. Indeterminacy kümeleri $\mathbb{C}^n$ nin en fazla $n-2$ kompleks boyutlu analitik varyeteleridir. Eğer f ve tersi f^{-1} in indeterminacy kümeleri kesişmiyorsa, f fonksiyonuna *regular* denir. [S] de regular otomorfizmalar için $(1,1)$ Green currentlar , μ^+, μ^- ve bunların kuvvetleri kullanılarak değişmez ölçümler elde edilmiştir.

Ancak bizim çalıştığımız $\mathbb{C}^3$ ün otomorfizları çoğunlukla regular değildir. Yani $I^+ \cap I^- \neq \emptyset$. Green current olan μ^+ nin kuvvetlerini hesapladığımızda 0 a eşit olduğunu görürüz. Bu nedenle bu durumda, regular otomorfizmalarda kullanılan yöntemle değişmez ölçümler elde etmek mümkün değildir. Bu durumda $\mathbb{C}^3$ ün f altında değişmez bir alkümesini oluşturup, bu kümeyi kullanarak *kısmi Green current* ları oluşturduk. Bu tür current lar ilk olarak [GS] de ve daha sonra [C] de kullanılmıştır. Bu kısmi Green current ları ve $\mu^+ \wedge \mu^-$ yi kullanılarak değişmez ölçümler elde edilebilmiştir.

Araştırma süresinin sunulan 24 ay yerine 15 ay olarak belirlenmesi nedeniyle bu çalışmaya helen devam edilmektedir. Elde edilen sonuçlar yayınlanmak üzere bir makale olarak hazırlanacaktır.

Araştırmanın yapıldığı kurum olan ODTÜ taahhütlerini yerine getirmiştir. Aynı şekilde araştırmanın koordinatörü olan Doç. Dr. İbrahim Ünal araştırma için gerekli desteği vermiştir.

References

[C] D.Coman, *On the dynamics of a class of quadratic polynomial automorphisms of* $\mathbb{C}^3$, Discrete Contin. Dyn. Syst., 8(1):55-67, 2002.

[CF] D. Coman and J. E. Fornæss, *Green's functions for irregular quadratic polynomial automorphisms of* $\mathbb{C}^3$, Michigan Mathematical Journal, 46(1999), 419-459.

[Ch] Chiappari, S. : Holomorphic extension of proper meromorphic mappings, *Michigan Math. J.* **38** (1991), 167-174.

Ö.Y. İ.Ü.

[CS] Cima, J. A. ; Suffridge, T. J. Boundary behavior of rational proper maps, *Duke Math. J.* **60** (1990), no. 1, 135-138.

[F] Forstneric, F. : Extending proper holomorphic mappings of positive codimension, *Invent. Math.* 95 (1989), no. 1, 31-61

[GS] V. Guedj and N. Sibony, *Dynamics of polynomial automorphisms of* $\mathbb{C}^k$, Ark. Mat., 40 (2002), 207-243

[S] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de* $\mathbb{P}^k$, Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), Panorama et Synthéses 8, pp. ix-x, xi-xii, 97-185, Soc. Math. France, Paris, 1999.

[Y] Yazici, O, *Dynamical estimates on a class of quadratic polynomial automorphisms of* $\mathbb{C}^3$*, Complex Variables and Elliptic Equations, 62:2, 230-240*

~~[Y2] Yazici, O, *Holomorphic Extension of Meromorphic Mappings Along*~~ *Real Analytic Hypersurfaces (Hakem aşamasında)*

Ö.Y. İ.Ü.

5. Araştırma Önerisinde Yer alan İş Paketlerinin Gerçekleşme Yüzdesi

(Araştırma Önerinizde yer verdiğiniz tüm iş paketlerini içerecek şekilde aşağıdaki tabloya giriniz)

İş Paketleri ve Gerçekleşme Yüzdesi*

İş Paketi	**Dönem İçi Gerçekleşme Yüzdesi**	**Toplam Gerçekleşme Yüzdesi**
1. İş paketi	%100	%100
2. İş paketi	%100	%80
3. İş paketi		

*: İhtiyacınıza göre satır sayısını artırabilirsiniz.

Ö.Y İ.Ü.

MALİ RAPOR TABLOSU
RAPOR DÖNEMİNDE GERÇEKLEŞEN HARCAMALAR

PROJE NO	:	117C037
RAPOR NO ve DÖNEMİ	:	Sonuç Raporu 15/10/2017 – 15/01/2019
YÜRÜTÜCÜ ADI SOYADI	:	Özcan Yazici
KURULUŞU	:	ODTÜ
PROJE ADI	:	Karmaşık analitik yüzeyler arasındaki meromorfik fonksiyonların lokal olarak genişletilmesi ve karmaşık polinom otomorfizmalarının dinamiklerinin incelenmesi

EKONOMİK SINIFLANDIRMA KODLARI						**PROJE SÜRESİ BOYUNCA GERÇEKLEŞEN HARCAMA (TL)**	**HARCAMALARA İLİŞKİN GEREKÇELER/AÇIKLAMALAR**
SARF GİDERLERİ (Tüketime Yönelik Mal Ve Malzeme Alımları)							
03	2	1	01		Kırtasiye ve Büro Malzemeleri Alımları		
03	2	1	05		Baskı ve Cilt Giderleri		
03	2	1	90		Diğer Kırtasiye ve Büro Malzemesi Alımları:		
03	2	6	01		Laboratuvar, Kimyevi, Temrinlik ve Tıbbi Malzeme ile İlaç Alımları		
03	2	9	90		Diğer Tüketim Mal ve Malzemesi Alımları		
SEYAHAT GİDERLERİ (Yol, Gündelik ve Konaklama Giderleri)							
03.3.1.01					Yurtiçi Geçici Görev Yollukları		
03.3.3.01					Yurtdışı Geçici Görev Yollukları		

Ö.Y. İ.Ü.

HİZMET ALIMLARI							
03	5	1	01		Etüt-Proje Bilirkişi Ekspertiz Giderleri		
03	5	1	02		Araştırma ve Geliştirme Giderleri		
03	5	5	01		Dayanıklı Mal ve Malzeme Kiralaması Giderleri		
03	5	5	02		Taşıt ve/veya İş Makinesi Kiralaması Giderleri		
03	5	5	10		Bilgisayar ve Bilgisayar Sistemleri ve Yazılımları Kiralaması Giderleri		
03	5	9	90		Diğer Hizmet Alımları		
MAKİNE VE TEÇHİZAT GİDERLERİ (MAMUL MAL ALIMLARI) (Alınan teçhizatların tek tek dökümü yapılarak cihazların fiyatları ayrı ayrı belirtilmelidir.)							
03.7.1.02			Büro ve İşyeri Makine ve Teçhizat Alımları:				
			1	MacBook 12 INC 256GB (dizüstü bilgisayar)		4500	Araştırma için gerekli makalelerin indirilip okunması ve elde edilen sonuçların makale formatında yazılması için kullanıldı.
			2				
			3				
03.7.2.01			Bilgisayar Yazılım Alımları ve Yapımları				
			1				
			2				
			3				
03.7.3.02			Makine Teçhizat Bakım ve Onarım Giderleri				
			1				
			2				
			3				
GENEL TOPLAM						**4500**	

(Yukarıda verilen tablo doldurulurken ''Bütçe Rehberi" başlıklı metinden faydalanılabilir.)

Ö.Y. İ.Ü

Not: Mali Rapor tablosunu doldurarak eklediğinizden emin olunuz.

	Adı ve Soyadı	İmza	Tarih
Araştırmacı:	Dr. Öğr. Üyesi Özcan Yazıcı		12.2.2019
Koordinatör:	Doç. Dr. İbrahim Ünal		12.2.2019

Ö.Y. İ.Ü

[Ek1]
(Preprint, submitted)

HOLOMORPHIC EXTENSION OF MEROMORPHIC MAPPINGS ALONG REAL ANALYTIC HYPERSURFACES

OZCAN YAZICI

ABSTRACT. Let $M \subset \mathbb{C}^n$ be a real analytic hypersurface, $M' \subset \mathbb{C}^N$ $(N \geq n)$ be a strongly pseudoconvex real algebraic hypersurface of the special form and F be a meromorphic mapping in a neighborhood of a point $p \in M$ which is holomorphic in one side of M. Assuming some additional conditions for the mapping F on the hypersurface M, we proved that F has a holomorphic extension to p. This result may be used to show the regularity of CR mappings between real hypersurfaces of different dimensions.

1. INTRODUCTION

The remarkable result of Forstrenič [5] on the classification problem of proper holomorphic mappings between unit balls states that if f is proper, holomorphic map from a ball in $\mathbb{C}^n$ to a ball in $\mathbb{C}^N$ and smooth of class C^{N-n+1} on the closure then f is a rational mapping. He posed the question of the holomorphic extendibility of such a rational mapping to any boundary point. In [4], Cima and Suffridge proved that every such mapping extends holomorphically to a neighborhood of the closed ball. This result was extended by Chiappari [3] by replacing the unit ball in domain with an arbitrary real analytic hypersurface in $\mathbb{C}^n$.

This results are also related to regularity of CR mappings between real hypersurfaces. When the real hypersurfaces lie in the complex spaces of same dimension, CR mappings of given smoothness must be real-analytic, (see for example [1]). In the case of real hypersurfaces of different dimensions, analyticity of CR mappings with given smoothness on the boundary was shown provided that the target is a real sphere (see for example [2, 7]). In the proof, they first show that the CR mappings extend meromorphically. Then using the results of Chiappari and Cima-Suffridge, this meromorphic extension defines an analytic extension.

In this work, we obtain a holomorphic extension result for meromorphic mappings with more general target spaces. More precisely we prove the following theorem.

Theorem 1.1. *Let $M \subset \mathbb{C}^n$ be a real analytic hypersurface and $M' \subset \mathbb{C}^N$ be a strongly pseudoconvex real algebraic hypersurface given locally by $\operatorname{Im} z'_N = p(z', \bar{z}')$ where $(z', z'_N) \in \mathbb{C}^N$, $N \geq n$ and $p(z, \bar{z})$ is a real valued polynomial. Let $U \subset \mathbb{C}^n$ be a neighborhood of a point $p \in M$ and Ω be the portion of U lying on one side of M. If $F : U \to \mathbb{C}^N$ is a meromorphic mapping which maps Ω holomorphically to one side of M', extends continuously on $\overline{\Omega}$ and $F(M \cap U) \subset M'$, then F extends holomorphically to a neighborhood of p.*

2010 *Mathematics Subject Classification.* 32D15, 32H04, 32H40.

Note that this improves the result of Chiappari [3] by replacing the sphere in the target with a special type of real algebraic hypersurface. One can not expect to have extension for mappings with arbitrary targets. There are examples of proper rational mappings from the unit ball to a compact set that can not be extended holomorphically through the boundary. (see [4], [6]).

2. Proof of Theorem 1.1

Proof. For simplicity, we will take $p=(0,\dots,0)$. Since the ring of germs of holomorphic functions is a unique factorization domain, we may assume that $F=\frac{f}{g}$ where $f=(f_j)_{1\le j\le N}$ is a holomorphic mapping and g is a holomorphic function near $0\in\mathbb{C}^n$ which has no common factor with f. If $g(0)\neq 0$, then F defines a holomorphic mapping near 0. Hence we may assume that $g(0)=0$.

Let M be given by $\psi(z,\overline{z})=0$ for some real analytic function ψ near 0 such that $\frac{\partial\psi}{\partial z_1}(0)\neq 0$. We define a non-zero holomorphic function $m(z)=\sum_{i=1}^n m_i z_i$ where $m_i=\frac{\partial\psi}{\partial z_i}(0)$. Since the zero sets of holomorphic functions are of measure zero, we can find a point $a=(a_1,\dots,a_n)\neq 0$ such that $m(a)\neq 0$, $g(a)\neq 0$, $f_j(a)\neq 0$ for all $j=1,\dots,N$. Here we have assumed that $f_j's$ are not identically equal to 0, otherwise we can replace the those $f_j's$ with zeros in the rest of the proof. Now we change the coordinates by

$$z_i=a_i\zeta_1+\sum_{j=2}^n b_{ij}\zeta_j.$$

Since $a\neq 0$, we can choose b_{ij} so that $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ gives a non-singular linear change of coordinates. In these new coordinates $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$, we have that $f_j(1,0,\dots,0)=f_j(z(1,0,\dots,0))=f_j(a)\neq 0$, $g(1,0\dots,0)=g(a)\neq 0$ and

$$\frac{\partial\psi}{\partial\zeta_1}(0)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\psi}{\partial z_i}(0)a_i=m(a)\neq 0.$$

For the convenience, we will denote the new coordinates by z again. Then we may assume that $f_j(z_1,0)\not\equiv 0$, $g(z_1,0)\not\equiv 0$ and $\frac{\partial\psi}{\partial z_1}(0)\neq 0$. Hence M can be defined as a graph $z_1=\rho(\overline{z_1},\tilde{z},\overline{\tilde{z}})$ where $\tilde{z}=(z_2,\dots,z_n)$ and $\rho(z_1,\lambda,\tau)$ is a holomorphic function near 0 in $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}^{n-1}$. We may also assume that $\rho(\overline{z_1},0,0)=\overline{z_1}$.

By Weierstrass preparation theorem, g can be written as $g(z_1,\tilde{z})=u(z_1,\tilde{z})h(z_1,\tilde{z})$ where $u(z_1,\tilde{z})=\sum_{j=0}^l a_j(\tilde{z})z_1^j$ is a Weierstrass polynomial so that $a_l(\tilde{z})\equiv 1$, $a_j(0)=0$ for $0\le j\le l-1$ and $h(0,0)\neq 0$. Since F is bounded as $z=(z_1,\tilde{z})\to 0$ in Ω, f_j can be decomposed as $f_j(z_1,\tilde{z})=u_j(z_1,\tilde{z})h_j(z_1,\tilde{z})$ where $u_j's$ are Weierstrass polynomials in z_1 of degree $k_j\ge l$ and $h_j(0,0)\neq 0$. Using division algorithm, one can find r_j of degree smaller than l in z_1 such that $u_j(z_1,\tilde{z})=u(z_1,\tilde{z})d_j(z_1,\tilde{z})+r_j(z_1,\tilde{z})$. Setting $D_j=d_jh_j$, $R_j=r_jh_j$, $D=(D_j)_{j=1}^N$, $R=(R_j)_{j=1}^N$, we have $f=uD+R$. Our aim is to show that $R\equiv 0$.

Since M' is strongly pseudoconvex, by a holomorphic change of variables it can be written as

$$M'=\{(z',z'_N)\in\mathbb{C}^N:\operatorname{Im} z'_N-\sum_{j=1}^{N-1}|z'_j|^2+\varphi(z',\overline{z'})=0\}$$

where $\varphi \equiv 0$ or φ is a real valued polynomial of degree bigger than 2. If $\varphi \equiv 0$ then M' is locally equivalent to the real sphere in $\mathbb{C}^N$ and Theorem 1.1 follows from the main result in [3].

Hence we can assume that $\varphi \not\equiv 0$. Let's write φ as

$$\varphi(z', \overline{z'}) = \sum_{I,J} \alpha_{I,J} z'^I \overline{z'}^J.$$

Since φ is real valued, $\overline{\alpha_{IJ}} = \alpha_{JI}$ and hence the highest degrees of z' and $\overline{z'}$ in φ are the same, say they are equal to $d \geq 2$.

Since F maps M into M', $\forall z \in M$ we have that

$$\frac{f_N(z)}{g(z)} - \frac{\overline{f_N(z)}}{\overline{g(z)}} - 2i \sum_{j=1}^{N-1} \frac{|f_j(z)|^2}{|g(z)|^2} - 2i\varphi\left(\frac{\tilde{f}(z)}{g(z)}, \frac{\overline{\tilde{f}(z)}}{\overline{g(z)}}\right) \equiv 0 \tag{2.1}$$

where $\tilde{f} = (f_1, \ldots, f_{N-1})$. Multiplying both sides of the above equation by $g(z)^d \overline{g(z)}^d$, we obtain that

$$\begin{aligned} f_N(z) g(z)^{d-1} \overline{g(z)}^d - \overline{f_N(z)} g(z)^d \overline{g(z)}^{d-1} - 2i \sum_{j=1}^{N-1} |f_j(z)|^2 g(z)^{d-1} \overline{g(z)}^{d-1} \\ -2i g(z)^d \overline{g(z)}^d \varphi\left(\frac{\tilde{f}(z)}{g(z)}, \frac{\overline{\tilde{f}(z)}}{\overline{g(z)}}\right) \equiv 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

For $z = (z_1, \tilde{z})$, we set $z^* = (\rho(\overline{z_1}, \tilde{z}, \overline{\tilde{z}}), \tilde{z})$, $s^*(z) = \overline{s(z^*)}$ for any function s. Then

$$\begin{aligned} f_N(z) g(z)^{d-1} \overline{g(z^*)}^d - \overline{f_N(z^*)} g(z)^d \overline{g(z^*)}^{d-1} - 2i \langle \tilde{f}(z), \tilde{f}(z^*) \rangle g(z)^{d-1} \overline{g(z^*)}^{d-1} \\ -2i g(z)^d \overline{g(z^*)}^d \varphi\left(\frac{\tilde{f}(z)}{g(z)}, \frac{\overline{\tilde{f}(z^*)}}{\overline{g(z^*)}}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

is a holomorphic function of z_1 and by (2.2) it is equal to 0 whenever $z_1 = \rho(\overline{z_1}, \tilde{z}, \overline{\tilde{z}})$, that is when $z = z^*$. Here $\langle , \rangle$ denotes the standard inner product, that is $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^N a_i \overline{b_i}$ for $a = (a_1, \ldots, a_N)$ and $b = (b_1, \ldots, b_N)$ in $\mathbb{C}^N$. For a fixed $\tilde{z}_0$, the real codimension of the set $\{z_1 = \rho(\overline{z_1}, \tilde{z}_0, \overline{\tilde{z}_0})\}$ in $\mathbb{C}^n$ is at most the sum of real codimensions of M and $\{\tilde{z} = \tilde{z}_0\}$. Hence the real dimension of the set $\{z_1 = \rho(\overline{z_1}, \tilde{z}_0, \overline{\tilde{z}_0})\}$ is at least 1. It follows that the function above is identically 0 as a function of z_1.

Using the identities $f = uD + R$, $g = uh$ and $\overline{\tilde{f}(z^*)} = \tilde{f}^*(z)$, it follows from (2.3) that

$$u^d u^{*d}(D_N h^{d-1} h^{*d} - D_N^* h^d h^{*(d-1)} - 2i\langle\tilde{D}, \overline{\tilde{D}^*}\rangle h^{d-1} h^{*(d-1)})$$
$$+u^{d-1} u^{*d}(R_N h^{d-1} h^{*d} - 2ih^{d-1} h^{*(d-1)}\langle\tilde{R}, \overline{\tilde{D}^*}\rangle)$$
$$+u^d u^{*(d-1)}(R_N^* h^d h^{*(d-1)} - 2ih^{d-1} h^{*(d-1)}\langle\tilde{D}, \overline{\tilde{R}^*}\rangle)$$
$$-2iu^{d-1} u^{*(d-1)} h^{d-1} h^{*(d-1)}\langle\tilde{R}, \overline{\tilde{R}^*}\rangle - 2ig(z)^d \overline{g(z^*)}^d \varphi\left(\frac{\tilde{f}(z)}{g(z)}, \frac{\overline{\tilde{f}(z^*)}}{\overline{g(z^*)}}\right) \equiv 0. \tag{2.4}$$

where $\tilde{D} = (D_1, \ldots, D_{N-1})$ and $\tilde{R} = (R_1, \ldots, R_{N-1})$.

Let $\tilde{z} = 0$. We note that

$$u^*(z_1, 0) = \overline{u(\rho(\overline{z_1}, 0, 0), 0)} = \overline{\rho(\overline{z_1}, 0, 0)^l} = z_1^l$$

and $u(z_1, 0) = z_1^l$. Let us assume that $R(z_1, 0) \not\equiv 0$ and the multiplicity of z_1 in $R(z_1, 0)$ is a for some $0 \le a < l$. That is $R(z_1, 0) = z_1^a Q(z_1)$ for some holomorphic function Q such that $Q(0) \neq 0$. The multiplicity of z_1 in the first summand of the function in (2.4) is greater than or equal to $2dl$. In the second and the third summands, the multiplicity of z_1 is greater than or equal to $(2d-1)l + a$. In the fourth summand, the multiplicity of z_1 is greater than or equal to $2(d-1)l + 2a$. The equation (2.4) implies that

$$\min\{2dl, (2d-1)l + a, 2(d-1)l + 2a\} = 2(d-1)l + 2a \tag{2.5}$$

must be smaller than or equal to the multiplicity of z_1 in the last term $g(z)^d \overline{g(z^*)}^d \varphi\left(\frac{\tilde{f}(z)}{g(z)}, \frac{\overline{\tilde{f}(z^*)}}{\overline{g(z^*)}}\right)$.

Note that the multiplicity of z_1 in $f = uD + R$ and in $g = uh$ are a and l, respectively. By writing

$$g(z)^d \overline{g(z^*)}^d \varphi\left(\frac{\tilde{f}(z)}{g(z)}, \frac{\overline{\tilde{f}(z^*)}}{\overline{g(z^*)}}\right) = \sum_{|I|,|J| \le d} \alpha_{IJ} \tilde{f}(z)^I g(z)^{d-|I|} \overline{\tilde{f}(z^*)}^J \overline{g(z^*)}^{d-|J|}$$

we see that the multiplicity of z_1 in the last summand in (2.4) is equal to

$$\min_{|I|,|J|,\alpha_{IJ} \neq 0} \{a|I| + l(d - |I|) + a|J| + l(d - |J|)\} \le \min_{|J|} \{ad + ld + |J|(a - l)\}. \tag{2.6}$$

The inequality above is obtained by taking $|I| = d$. We have the following cases for d.

Case 1: $d = 2$. Since the total degree of φ is bigger than or equal to 3, when $|I| = 2$, $|J|$ must be at least one. Then it follows from (2.5) and (2.6) that

$$2l + 2a \le \min_{|J|}\{2a + 2l + |J|(a - l)\} \le 3a + l.$$

The second inequality above follows from the fact that $|J| \ge 1$ and $a - l < 0$. But this implies that $l \le a$, which contradicts to the choice of a and hence $R(z_1, 0) \equiv 0$.

Case 2: $d > 2$. It follows from (2.5) and (2.6) that

$$2(d-1)l + 2a \le \min_{|J|}\{ad + ld + |J|(a - l)\} \le ad + ld.$$

But this implies that $d \le 2$. Hence again we have that $R(z_1, 0) \equiv 0$.

Now we suppose that $R \not\equiv 0$. We may assume that $R(a) \neq 0$ for some $a = (a_1, \dots, a_n)$ such that $a_2 \neq 0$. We change the coordinates from z to ζ defined by

$$z_1 = a_1\zeta_2 + \zeta_1,\ z_i = a_i\zeta_2 + \sum_{j=3}^{n} b_{ij}\zeta_j,\ i = 2, \dots, n.$$

Since $(a_2, \dots, a_n) \neq 0$, b_{ij} can be chosen so that ζ gives a non-singular linear change of coordinates. In these new coordinates, $R(0,1,0,\dots,0) = R(a) \neq 0$, $R(\zeta_1, 0) \equiv 0$, $f_j(\zeta_1, 0) \not\equiv 0$, $g(\zeta_1, 0) \not\equiv 0$ and $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_1}(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(0) \neq 0$. We denote these new coordinates by z again. Then

$$R(z_1, 0) \equiv 0, R(z_1, z_2, 0 \dots, 0) \not\equiv 0,$$

f_j and g do not vanish on z_1-axis and M can be written as $z_1 = \rho(\overline{z_1}, \tilde{z}, \overline{\tilde{z}})$ near the origin.

Since $R(z_1, z_2, 0, \dots, 0)$ is a non-zero analytic function of z_2 vanishing at $z_2 = 0$ there exists the largest integer $k \geq 1$ such that z_2^k divides $R(z_1, z_2, 0, \dots, 0)$. We define $G_i = \frac{R_i}{z_2^k}$, $G = (G_1, \dots, G_N)$ and $\tilde{G} = (G_1, \dots, G_{N-1})$. Note that

$$G(z_1, 0, \dots, 0) \neq 0. \tag{2.7}$$

Then dividing the terms in (2.4) by $|z_2|^{2k}$, we obtain that

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|z_2|^{2k}} u^d u^{*d} (D_N h^{d-1} h^{*d} - D_N^* h^d h^{*(d-1)} - 2i\langle \tilde{D}, \overline{\tilde{D}^*}\rangle h^{d-1} h^{*(d-1)}) \\
&+ \frac{1}{\overline{z_2}^k} u^{d-1} u^{*d} (G_N h^{d-1} h^{*d} - 2i h^{d-1} h^{*(d-1)} \langle \tilde{G}, \overline{\tilde{D}^*}\rangle) \\
&+ \frac{1}{z_2{}^k} u^d u^{*(d-1)} (G_N^* h^d h^{*(d-1)} - 2i h^{d-1} h^{*(d-1)} \langle \tilde{D}, \overline{\tilde{G}^*}\rangle) \\
&- 2i u^{d-1} u^{*(d-1)} h^{d-1} h^{*(d-1)} \langle \tilde{G}, \overline{\tilde{G}^*}\rangle - \frac{2i}{|z_2|^{2k}} g(z)^d \overline{g(z^*)}^d \varphi\left(\frac{\tilde{f}(z)}{g(z)}, \overline{\frac{\tilde{f}(z^*)}{g(z^*)}}\right) \equiv 0.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

We take $(z_3, \dots, z_n) = 0$ and let $z_2 \to 0$ in above equation. Considering the order of z_1 in all terms in (2.8), as in above argument for $R(z_1, 0, \dots, 0)$, we obtain that $G(z_1, 0 \dots, 0) = 0$ when $z_1 = \rho(\overline{z_1}, 0, 0)$. But this contradicts to (2.7). Consequently, $R \equiv 0$ and $F = \frac{f}{g} = \frac{D}{h}$ defines a holomorphic mapping near $0 \in \mathbb{C}^n$. □

Acknowledgments. I am grateful to Nordine Mir for his suggestion to work on this problem and for useful discussions on this subject. The author is supported by TÜBİTAK 2232 Proj. No 117C037.

REFERENCES

[1] Baouendi, M.S. ; Ebenfelt, P. ; Rothschild, L.P. : Real submanifolds in complex space and their mappings, Princeton Math. Series **47** Princeton Univ. Press, (1999).

[2] Baouendi, M.S.; Huang, X. ; Rothschild, L.P. : Regularity of CR mappings between algebraic hypersurfaces, Invent. Math. **125** (1996), 13-36.

[3] Chiappari, S. : Holomorphic extension of proper meromorphic mappings, *Michigan Math. J.* **38** (1991), 167-174.
[4] Cima, J. A. ; Suffridge, T. J. Boundary behavior of rational proper maps, *Duke Math. J.* **60** (1990), no. 1, 135-138.
[5] Forstnerič, F. : Extending proper holomorphic mappings of positive codimension, *Invent. Math.* **95** (1989), no. 1, 31-61
[6] Ivashkovich, S. ; Meylan, F. : An example concerning holomorphicity of meromorphic mappings along real hypersurfaces, *Michigan Math. J.* **64** (2015), no. 3, 487-491.
[7] Mir, N. : Analytic regularity of CR maps into spheres, *Math. Res. Lett.* **10** (2003), no. 4, 447-457.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, MIDDLE EAST TECHNICAL UNIVERSITY, 06800 ANKARA, TURKEY
E-mail address: oyazici@metu.edu.tr