T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

X(3872) MEZONUNUN PERTÜRBATİF OLMAYAN YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

HALİL MUTUK

DOKTORA TEZİ

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESi
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

X(3872) MEZONUNUN PERTÜRBATİF OLMAYAN YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

HALİL MUTUK

FİZİK ANABİLİM DALI

SAMSUN
2018

Her hakkı saklıdır.

TEZ ONAYI

Halil Mutuk tarafından hazırlanan "X(3872) Mezonunun Pertürbatif Olmayan Yöntemlerle İncelenmesi" adlı tez çalışması 12.01.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fizik Anabilim Dalı

İkinci Danışman Prof. Dr. Altuğ ÖZPİNECİ
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Fizik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri

Başkan Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fizik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Önder KABADAYI
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
OÖFMA Eğitimi Anabilim Dalı

Üye Doç. Dr. M. Çağatay TUFAN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fizik Anabilim Dalı

Üye Doç. Dr. Yasemin SARAÇ
Atılım Üniversitesi
Fizik Anabilim Dalı

Üye Doç. Dr. Melahat BAYAR
Kocaeli Üniversitesi
Fizik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım. .../.../2018

Prof. Dr. Bahtiyar ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

02.02.2018

Halil MUTUK

ÖZET

DoktoraTezi

X(3872) MEZONUNUN PERTÜRBATİF OLMAYAN YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Halil Mutuk

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hasan Gümüş
İkinci Danışman: Prof. Dr. Altuğ Özpineci

Bu tez çalışmasında $X(3872)$ rezonansı moleküler resimde Kuantum Renk Dinamiği Toplam Kuralları (KRDTK) çalışılarak incelenmiştir. İlk önce harmonik salınıcı için KRDTK yöntemi uygulanmış daha sonra B mezonunun kütlesi elde edilmiştir. Ağır Kuark Spin Simetrisi (AKSS) $X(3872)$'nin eşleri olabileceğini öngörmüştür. Kullanılan akım neticesinde 4 tane ağır kuark eşi öngörülmüştür. $X(3872)$ ve ağır kuark eşlerinin kütle tayfı KRDTK yöntemiyle elde edilmiştir. $\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$, $\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ve $\Pi^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ilişkilendirme fonksiyonlarına karşılık gelen kütle tayfının ortalama değeri $m = 4055 \pm 127\ MeV$ olup hata payı içerisinde $X(3872)$'nin deneysel kütlesiyle uyumludur. $X(3872)$'nin ağır kuark eşlerinin dejenereliği de sonuçlarımızla örtüşmektedir. Ayrıca toplam kuralları analizi yapılarak hesaplamada seçilen Borel parametre aralığının tutarlı olduğu gösterilmiştir.

Ocak 2018, 92 sayfa

Anahtar Kelimeler: $\boldsymbol{X(3872)}$, Mezon Molekülleri, KRD Toplam Kuralları

ABSTRACT

Doctoral Dissertation

INVESTIGATION OF X(3872) MESON VIA NONPERTURBATIVE METHODS

Halil Mutuk

Ondokuz Mayis University
Graduate School of Sciences
Department of Physics

Advisor: Prof. Dr. Hasan Gümüş
Co-advisor: Prof. Dr. Altuğ Özpineci

In this thesis, $X(3872)$ resonance is studied via Quantumchromo Dynamics Sum Rules (QCDSR) with molecular picture. First harmonic oscillator is studied with QCDSR and B meson mass is obtained. Heavy Quark Spin Symmetry (HQSS) predicts heavy partners for $X(3872)$. In this content, $X(3872)$ meson and its heavy partners is studied by QCDSR method. 4 heavy partners are predicted via the chosen current. Mass spectrum of $X(3872)$ and its heavy partners are obtained by QCDSR method. Mean value of mass spectrum which are obtained from correlation functions of $\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$, $\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ and $\Pi^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ is $m = 4055 \pm 127\ MeV$ and it is consistent within the error of $X(3872)$ mass. The degeneracies of X(3872) partners are compatible with the heavy quark spin symmetry prediction. QCDSR method analysis is done and it is shown that Borel parameter window that is used in this work is compatible.

January 2018, 92 pages

Key Words: $X(3872)$, Meson Molecules, QCD Sum Rules

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Doktoram süresince göstermiş olduğu sonsuz anlayış ve hoşgörüden ötürü danışman hocam Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ'e teşekkür ederim.

Tezimin her aşamasında katkılarını esirgemeyen, yapıcı eleştirileriyle bana destek olan ve sorduğum her soruyu en ince ayrıntısına kadar anlatan eş danışmanım Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fizik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Altuğ ÖZPİNECİ'ye minnettarım. Kendisinin bir öğrencisi olmak bana gurur ve onur vermiştir.

Tezdeki hesaplamaların başında yardımcı olan Öğr. Grv. Dr. Hüseyin DAĞ'a ve ilerleyen aşamalarında bana yardımcı olan Doç. Dr. Yasemin SARAÇ'a teşekkür ederim.

ODTÜ'de ders alma şansına eriştiğim ve kendilerinden çok şey öğrendiğim merhum Prof. Dr. Namık Kemal PAK'a, Prof. Dr. Takhmasib ALIEV'e ve Prof. Dr. Bayram TEKİN hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca kendisinden ders almamış olsam da onu tanımaktan her zaman onur duyduğum, sormuş olduğum bütün sorularıma bıkmadan usanmadan yanıt vererek bilimin önemini ve onunla uğraşmanın ne kadar güzel olduğunu hep hatırlatan İYTE Fizik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Durmuş Ali DEMİR'e teşekkür ederim. Fiziğe bakış açımı ne kadar değiştirdiklerini tarif etmem zor. Ayrıca lisans ve yüksek lisansta ders aldığım bölüm hocalarıma da teşekkür ederim.

Tezimi 114F234 numaralı proje ile (Proje yürütücüsü: Prof. Dr. Altuğ ÖZPİNECİ) destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Bu zor süreçte hep yanımda olan anneme, babama, ablalarıma ve abime, ayrıca eşimin anne ve babasına çok teşekkür ederim.

Eşim Araş. Gör. Tuğba MUTUK'a bu yolda bana arkadaş ve büyük destek olduğu için minnettarım. Onun yardımı, desteği olmadan bu tezin gerçekleşmesi imkansızdı.

Son olarak bu tezi, ileride bu önsözü okuyarak ondan çaldığım zaman için bana kızabilecek olan oğlumuz Metehan'a itham ediyorum.

Ocak 2018, Samsun

Halil MUTUK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
KISALTMALAR vi
ŞEKİLLER LİSTESİ vii
ÇİZELGELER LİSTESİ ix
1. GİRİŞ 1
1.1 Amaç ve Kapsam 1
2. KURAMSAL TEMELLER 14
2.1 Kuantum Elektrodinamiği 14
2.2 Kuantum Renk Dinamiği 14
2.2.1 Asimptotik Özgürlük 16
2.2.2 Hapsolma 18
3. MATERYAL VE YÖNTEM 22
3.1. SVZ Toplam Kuralları 22
3.2. İlişkilendirme Fonksiyonu 24
3.2.1. İşlemci çarpım açılımı (İÇA) 26
3.2.2. Spektral yoğunluk 28
3.2.3. Borel dönüşümü 31
3.2.4. Toplam kuralı 33
3.2.5. KRDTK ile spektrum hesabı 33
3.3. Harmonik Salınıcı için SVZ Toplam Kuralları 35
3.3.1. Bir boyutlu harmonik salınıcı için SVZ toplam kuralları 40
3.4. B Mezonu Kütlesi İçin SVZ Toplam Kuralları 44
3.4.1. Π_2'nin hesabı 45
3.4.2. Π_3'ün hesabı 48
3.4.3. Fenomenolojik (hadron) taraf hesabı 53
3.4.4. Borel parametresinin seçimi 58
4. ARAŞTIRMA BULGULARI 60
4.1. $j(x)$ Akımının Belirlenmesi 60
4.2. İlişkilendirme Fonksiyonunun KRD Kısmı 61
4.3. İlişkilendirme Fonksiyonunun Fenomenolojik Kısmı 63
4.3.1. $j_{\mu\nu}^{(2)}$ ile yazılan ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik kısmı 64
4.3.1.1. 2^{++} için kütle tayfı 67
4.3.1.2. 1^{++} için kütle tayfı 68
4.3.1.3. 0^{++} için kütle tayfı 69
4.3.2. $j_{\mu\nu}^{(1)}$ ile yazılan ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik kısmı 70
4.3.2.1. 1^{++} için kütle tayfı 71
4.3.2.2. 1^{-+} için kütle tayfı 73
4.3.3. $j_{\mu\nu}^{(0)}$ ile yazılan ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik kısmı 74
4.4. Toplam Kuralları Analizi 75
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 81
KAYNAKLAR 84

EK 1 90
EK 2 91

KISALTMALAR

AKSS	**:** Ağır Kuark Spin Simetrisi
EAT	**:** Etkin Alan Teorisi
İÇA	**:** İşlemci Çarpım Açılımı
KAT	**:** Kuantum Alan Teorisi
KED	**:** Kuantum Elektrodinamiği
KRD	**:** Kuantum Renk Dinamiği
KRDTK	**:** Kuantum Renk Dinamiği Toplam Kuralları
SVZ	**:** Shifman-Vainstehin-Zakharov
TPD	**:** Tek Pion Değiştokuşu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. KRD'de yer alan temel etkileşimlerden biri olan kuark-glüon etkileşimi (Griffiths, 2008)…….....15

Şekil 2.2. Renk yükü taşıyan kuark ve glüon etkileşimi (Griffiths, 2008)……. 15

Şekil 2.3. Bir yükün etrafındaki boşluğun kutuplanması (Griffiths, 2008)…… 16

Şekil 2.4. Sol tarafta KED'deki, sağ tarafta ise KRD'deki kutuplanma olayı (Halzen ve Martin, 1984)……. 18

Şekil 2.5. Kuark hapsini gösteren temsili bir durum (Griffiths, 2008)……...19

Şekil 2.6. Kuark-gluon bağlaşım sabitinin momentumla değişimi (Cincioğlu, 2016) …… 19

Şekil 2.7. Bağlaşım sabitinin momentuma göre değişimi ve asimptotik özgürlük ile hapsolma bölgeleri (Khodjamirian, 2004)……..20

Şekil 3.1. Spektral yoğunluk fonksiyonu (Lancaster ve Blundell, 2014)……...29

Şekil 3.2. Kompleks düzlemdeki D_1, D_2, D_3 ve $D_1 \cap D_2$ bölgeleri (Brown ve Churcill, 2009)……....31

Şekil 3.3. s_u'nun değişim grafiği……54

Şekil 3.4. B mezonu kütlesinin $s_0 = 30\ \mathrm{GeV}^2$ ve $s_0 = 32\ \mathrm{GeV}^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi……... 59

Şekil 4.1. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 2^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ \mathrm{GeV}^2$ ve $s_0 = 19\ \mathrm{GeV}^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi……...68

Şekil 4.2. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 1^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ \mathrm{GeV}^2$ ve $s_0 = 19\ \mathrm{GeV}^2$değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi……...69

Şekil 4.3. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 0^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ \mathrm{GeV}^2$ ve $s_0 = 19\ \mathrm{GeV}^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi……...70

Şekil 4.4. $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 1^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ \mathrm{GeV}^2$ ve$s_0 = 19\ \mathrm{GeV}^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi……...72

Şekil 4.5. $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 1^{-+} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ \mathrm{GeV}^2$ ve $s_0 = 19\ \mathrm{GeV}^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi……...74

Şekil 4.6. $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 0^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ \mathrm{GeV}^2$ ve $s_0 = 19\ \mathrm{GeV}^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi……...75

Şekil 4.7. $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 0^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi……..77

Şekil 4.8. $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 1^{-+}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi……..78

Şekil 4.9.$\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen$J^{PC} = 1^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi……..78

Şekil 4.10. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 0^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi……..79

Şekil 4.11. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 1^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi……..79

Şekil 4.12. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 2^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi……..80

ÇİZELGELER LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 1.1. Çarmonyum spektrumunu açıklayan modeller (Hanhart, 2014)..... 3

Çizelge 1.2. $L = 0$ için JPC değerleri 9

Çizelge 3.1. Çarmonyum spektrumunu açıklamada kullanılan akımlar 25

Çizelge 3.2. Operatör boyutları ve yoğuşmalar 27

Çizelge 3.3. Denklem (3.46) kullanılarak elde edilen elektrik alandaki taban durumu enerji seviyeleri (w biriminde)..... 43

Çizelge 3.4. Denklem (3.56) kullanılarak elde edilen elektrik alandaki taban durumu enerji seviyeleri (w biriminde)..... 43

Çizelge 5.1. $X(3872)$ eşleri için elde edilen nümerik kütle değerleri 81

Çizelge 5.2. AKSS altında $X(3872)$ eşleri 82

1. GİRİŞ

1.1 Amaç ve Kapsam

İlk olarak 2003 yılında Belle deney grubu tarafından $B^{\pm} \rightarrow K^{\pm}\pi^{+}\pi^{-}J/\psi$ bozunumunda keşfedilen $X(3872)$ mezonu gösterdiği sıradışı özelliklerle mezon spektrumunda bir bulmaca olarak yerini almıştır (Choi vd, 2003). Daha sonraları CDF (Acosta vd, 2004), D0 (Abazov vd, 2004), BaBar (Aubert vd, 2005) ve son olarak 2012 yılında da LHCb (Aaij vd, 2012) tarafından tekrar gözlemlenmiştir.

Geleneksel mezonlar bir kuark ve bir de karşıt-kuarktan oluşan yapılardır. Bir bağlı durumun relativistik olup olmaması bağ enerjisi ile bileşenlerinin durgun enerjilerinin toplamının karşılaştırılmasıyla bulunabilir. Eğer bağ enerjisi, bileşenlerin durgun enerjilerinin toplamından küçükse ilgili durum relativistik değildir. m_1 ve m_2 kütleli iki mezon M kütleli bir yapı oluşturduğunda yeni yapının bağlanma enerjisi $M-(m_1+m_2)$ formülüne göre bulunur. Relativistik olmayan kuark modelinde, mezonlar hidrojen atomuna benzer bir şekilde etkileşim potansiyeli altında birbiri etrafında dönen noktasal iki parçacık olarak ele alınır. Bu yaklaşım altında pertürbatif olmayan yöntemler kullanılarak öngörülen düşük enerji seviyeli durumlar gözlemlenen hadron spektrumu ile iyi bir şekilde uyuşmaktadır (Gasiorowicz ve Rosner, 1981; Julia- Diaz ve Riska, 2004). Ancak daha yüksek enerjili durumlar ele alındığında mezonlara ve baryonlara uygulanan geleneksel yaklaşım bazı zorluklarla karşılaşır. Örneğin bu zorluklardan biri yüklü çarmonyum gibi durumların varlığıdır (Ablikim vd, 2013). Hadronların geleneksel gösteriminde, çarmonyum bir tılsım ve bir karşıttılsım kuarktan oluşan bir mezondur ve bundan dolayı bir elektrik yüküne sahip olamaz. Eğer bir yüke sahipse o zaman kesin olarak geleneksel bir çarmonyum değildir.

Mezonların bir kuark bir de karşıtkuarktan oluşan veya olası diğer modellere uyan sistemler olarak tasvir edilmesi dalga fonksiyonlarının

$$|M\rangle = a|q\bar{q}\rangle + b|q\bar{q}g\rangle + c|q\bar{q}q\bar{q}\rangle + \cdots \tag{1.1}$$

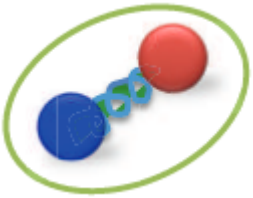
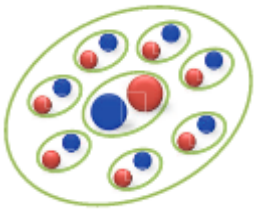
şeklinde yazılmasını mümkün kılar. Geleneksel mezon tasvirinin bize söylediği bu açılımda birinci terimin diğer terimlere göre daha baskın özellik göstermesidir. İkinci terim kuark-glüon etkileşimini ve üçüncü terim ise dörtlü kuark durumunu temsil eder.

Yüksek enerji fiziğinde *rezonans* (rezonans parçacıkları) olarak adlandırdığımız olgu deneylerde ortaya çıkan ve yaklaşık olarak 10^{-20} s mertebelerinde ömre sahip parçacıklardır. Bu son derece küçük zaman mertebesinde ortaya çıkan parçacıklar hızlıca diğer parçacıklara bozunurlar. Rezonanslarla ilgili elde edebildiğimiz deneysel veriler oldukça sınırlıdır: kütle, ömür ve bozunma ürünleri gibi.

$X(3872)$ ve buna benzer diğer rezonansları (egzotik parçacıklar olarak da adlandırılır) ayrı kılan özellik geleneksel mezon tasvirine uymamalarıdır. Bu rezonansların kütleleri ve diğer özellikleri (parite, yük paritesi vb.) kuark modele uyup uymadığı hala kesinlik kazanmamıştır. Geleneksel kuark modele göre açıklamaya çalışıldığında bazı sorunlar oluşmaktadır. Dolayısıyla bu rezonansları anlamak için dörtlü kuark, hibrit model, hadro-kuarkonyum model, glueball model ve hadronik molekül model gibi modeller geliştirilmiştir. Bu modellerin kısa bir özeti sırasıyla $Q, \bar{Q}$ ağır kuark ve karşıtkuarkı, $q, \bar{q}$ hafif kuark ve karşıtkuarkı göstermek üzere Çizelge 1.1'de verilmektedir.

Mezonlar sınıfına dahil olan kuarkonyumlar bir kuark Q ve bunun karşıt-kuarkından $\bar{Q}$ oluşan yapılardır. $c\bar{c}$ tılsım kuarklarından oluşan sisteme *çarmonyum*, $b\bar{b}$ kuarklarından oluşan sisteme de *botomonyum* denir. Kuarkonyum durumları $Q\bar{Q}$ sisteminin toplam spin açısal momentumu S, $Q\bar{Q}$ çiftinin yörünge açısal momentumu L ve bunların toplam açısal momentumu olan $J = L + S$ kuantum sayılarıyla sınıflandırabilirler. Tayf (spektroskopik) gösteriminde n baş kuantum sayısı olmak üzere $n^{2S+1}L_J$ terim sembolüyle sınıflandırılırlar. Parite kuantum sayısı $P = (-1)^{L+1}$, yük eşlenik kuantum sayısı $C = (-1)^{L+S}$ olmak üzere J^{PC} gösterimi de sıklıkla kullanılır.

Çizelge 1.1. Çarmonyum spektrumunu açıklayan modeller (Hanhart, 2014)

Temsili Resim	Model Adı	İçerik
	Tetrakuark	$(Qq) + (\bar{Q}\bar{q})$
	Hibrit	$(Q\bar{Q})$ + glüonlar
	Hadro-kuarkonyum	$(Q\bar{Q})$ + kuarkonyumlar
	Glueball	Gluonlar
	Hadronik Molekül	$(\bar{Q}q) + (Q\bar{q})$

Çarmonyum, c tılsım kuark ve karşıt kuarkının oluşturduğu bir bağlı durumdur ve $c\bar{c}$ ile temsil edilir. 1974 Kasım ayında Brookehaven Ulusal Laboratuvarı ve Stanford Doğrusal Hızlandırıcısı tarafından keşfedilmesinin ardından güçlü etkileşimleri anlamak için uygun bir çalışma alanı olmuştur. Kütlesi $3.1\,GeV$ civarında olan çarmonyum, egzotik çarmonyum tayfının kilit anahtarı rolündedir. Çarmonyum tayfının son derece zengin olması onu hadron fiziğinin popüler bir çalışma konusu haline getirmiştir. Çarmonyum tayfını anlamak için *izospin, parite, yük eşleniği* ve *zaman terslenmesi* önemli kavramlardır. İzospin güçlü etkileşime ait bir kuantum sayısıdır. İlk olarak Heisenberg tarafından önerilen izospin kavramı proton $(938\,MeV)$ ve nötronun $(940\,MeV)$ kütlelerinin birbirlerine çok yakın olmasından dolayı aynı parçacığın farklı durumları olarak ele alınabileceğini söyler. Genel olarak izospin, güçlü etkileşim altında yükleri farklı olmasına rağmen aynı şekilde etkilenen parçacıkların, üst bir parçacığın izospin durumları olarak adlandırılabileceğini söyler.

Tetrakuark modelinde bir ağır ve bir hafif kuarkın oluşturduğu (her zaman birisinin ağır olması gerekmeyebilir) çiftkuark (diquark) ve bunların karşıt çiftkuarkı sıkı bir şekilde birbirlerine bağlıdır. Bu modeldeki parçacık kütlelerinin eşik değere yakın olması gerekmez. $X(3872)$'nin $J^{PC} = 1^{++}$ durumu için bu model rezonanstaki dar genişliği (narrow width) ve $J/\psi\rho$ ve $J/\psi w$ bozunumlarını açıklayabilmektedir. Tetrakuark modeli $X(3872)$'nin yüklü eşlerinin olabileceğini söylemekle birlikte buna ek olarak kütle ayrışmasını $7\,MeV$ olarak öngörmüştür. $X(3872)$'nin yapısını bu model kullanılarak araştıran öncü çalışmalar Maiani vd. (2005) ve Hogaasen vd. (2006) tarafından yapılmıştır.

Hibrit modeli bir ağır kuark ve bunun karşıt kuarkın bağlı durum oluşturduğu ve değerlik (valence) bandında yer alan glüonun bağlı durum içerisinde etkin olarak davrandığını söyler. Glüonlar taşıdığı renk yükü neticesinde birbirleriyle de etkileşebildiğinden $q\bar{q}$ çiftinin modele eklenmesiyle oluşacak olan uyarılmış glüonların egzotik kuantum sayılı mezonları oluşturabileceğini ifade eder. Bu modelde $X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ bozunumunun tercihen gerçekleşeceğini ve en düşük egzotik kütleli mezonun $Y(4260)$ olacağını söyler. Ayrıca en hafif egzotik durumun kuantum sayısının $J^{PC} = 1^{-+}$ öngörür. Hibrit modelinde hesaplamalar MIT Bag modele, akı tüpü (flux tube) yaklaşımına ve örgü KRD'ye dayanmaktadır. Li (2005) $X(3872)$'nin hibrit bir mezon olup olmayacağını araştırmışlardır.

Hadro-kuarkonyum modeli merkezde ağır kuarkların oluşturduğu $\bar{Q}Q$ yapısının etrafında hafif kuarkların oluşturduğu kuarkonyumların $\bar{q}q$ var olduğunu söyler. Bu haliyle hadro-kuarkonyum yapısı, ağır bir çekirdeğin etrafını saran elektron bulutu sistemiyle şekil olarak benzerdir. Merkezdeki ağır kuarklarla etrafındaki hafif kuarkların uyarılmış durumları bağlı durum oluşturabilecek şekilde etkileşebilir. Bu etkileşme Van der Waals kuvvetine benzeyen fakat KRD'nin abelyen olmayan yapısı neticesinde karmaşık bir şekildedir.

Glueball modelinde yer alan durumlar glüonların oluşturduğu kompozit parçacıklardır ve herhangi bir kuark yapısı içermezler. KRD'nin yapısından dolayı glüonlar renk yükü taşıdıklarından ve birbirleriyle etkileşebildiklerinden bu tür kompozit parçacıkları oluşturabilirler. Örgü KRD ve Kuantum Renk Dinamiği Toplam Kuralları (KRDTK) yöntemiyle yapılan hesaplamalara göre en düşük kütleli glueball durumu $1000 - 1700\ MeV$ arasındadır (Ochs, 2013). Ayrıca Seth (2005) $X(3872)$ için alternatif bir açıklamayı glueball modeli kullanarak getirmeye çalışmıştır. Glueball modelinin genel bir durumu Ochs'un yaptığı çalışmada bulunabilir (Ochs, 2013).

Hadronik molekül modelinde bir ağır kuark ve bir hafif karşıt kuark $(Q\bar{q})$ ile bir ağır karşıt kuark ve bir hafif kuark $(\bar{Q}q)$ bir araya gelerek molekül oluşturduğu düşünülür. Tipik bir mezonun boyutundan daha fazla bir mesafeye yayılırlar.

$X(3872)$ rezonansının kütlesi 3871.69 ± 0.17 MeV olup bu değer $\bar{D}^{*0}(2006.97 \pm 0.19\ \text{MeV})$ ve $D^0(1864.84 \pm 0.17\ \text{MeV})$ mezonlarının kütleleri toplamına hata payı içerisinde neredeyse eşittir. Sıfıra yakın ya da çok küçük bir bağlanma enerjisi ilgili sistemi relativistik olmayan bir hale soktuğundan $X(3872)$ hadronik molekül modeline göre incelenebilir. Ayrıca bağlı durumun relativistik olmaması onu potansiyel kuark modelin ilgi alanına da sokar.

Geleneksel tasvire uyan mezonları yörüngesel açısal momentum l, spin açısal momentum s ve toplam açısal momentum J kuantum sayılarını kullanarak sınıflandırabiliriz. Bununla birlikte bazı mezonlarda, örneğin $S(l = 0)$ ve $D(l = 2)$ durumları karışabileceğinden bu mezonların belirli bir yörüngesel açısal momentum l sayısı yoktur (Godfrey ve Isgur, 1985). Dolayısıyla l ve s'nin birlikte kullanılması pek mümkün olmayabilir. Mezonların C ve P pariteleri bu kuantum sayıları cinsinden şöyledir:

$$P = (-1)^{l+1}, C = (-1)^{l+s} \tag{1.2}$$

Buna göre bazı J, C ve P kombinasyonları mümkün değildir. Örneğin $C = -P$ durumunu gözönüne alırsak bu sistemde $s = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $J = l$ olacaktır. Eğer $P = (-1)^{J+1}$ değilse bu sistem kuark-karşıtkuarktan oluşan bir sistem değildir. Ayrıca J^{PC} kuantum sayılarının dışında elektrik yükü de mezonların sınıflandırılmasında kullanılabilir. Geleneksel mezonların elektrik yükü $+1, 0$ veya -1'dir. Çarmonyumların elektrik yükü sıfırdır. Bunların dışında, örneğin yüklü Z_c gibi elektrik yüküne sahip olan mezonlar geleneksel mezon olamazlar.

$X \to J/\psi\gamma$ bozunumunda C (yük eşlenik) kuantum sayısının pozitif yani $C = +$ olması gerektiği Aubert vd. (2006) tarafından belirlenmiştir. Ayrıca bu bozunum kanalı $C = -$ olan durumu dışarlamıştır.

Bir diğer bozunum kanalı $X \to J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0$'dır. $\pi^+\pi^-\pi^0$ kütle dağılımı incelendiğinde paritenin negatif olacağı öngörülmüştür (Sanchez vd, 2010). Bu iki bozunumun dallanma oranı

$$\frac{Br(X(3872) \to J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0)}{Br(X(3872) \to J/\psi\pi^+\pi^-)} = 0.8 \pm 0.3 \pm 0.1 \tag{1.3}$$

şeklindedir (Choi vd, 2011). $X(3872) \to J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0$ bozunumunda izospinin 0, $X(3872) \to J/\psi\pi^+\pi^-$ bozunumunda izospinin 1 olması $X(3872)$ için büyük izospin ihlali olduğunu gösterir.

Başlangıçta $X(3872)$'nin J^{PC} kuantum sayılarının $B^+ \to X(3872)K^+ \to \pi^+\pi^-J/\psi$ bozunum kanalı analiz edilerek $J^{PC} = 1^{++}$ ve $J^{PC} = 2^{-+}$ gibi iki değer olabileceği fakat 1^{++} durumunun daha olası olduğu belirtilmiştir (Choi vd, 2011; Abulencia vd 2007; Sanchez vd, 2010). Bu çalışmalara ek olarak mezon moleküllerine aday olabilecek farklı iki rezonansın ($Z_b(10610)$ ve $Z_b(10650)$ izovektör durumları) varlığı ortaya çıkmıştır (Bondar vd, 2012; Uehara vd, 2010). $X \to J/\psi\pi^+\pi^-$ kanalında yapılan analizler $\pi^+\pi^-$ kütle dağılımının ρ mezonundan kaynaklanabileceğini ve dolayısıyla izospinin $I = 1$ olması gerektiğini söyler. Bugüne kadar deneysel olarak $X(3872)$'ye ait bir ağır kuark spin simetri eşi bulunamaması $X(3872)$'nin izospinin $I = 0$ olmasını gerektirir. 2013 yılındaki LHCb deneyi sonuçlarına göre $X(3872)$'nin J^{PC} kuantum sayısının 1^{++} olduğu bulunmuştur (Aaij vd, 2013a).

$X(3872) \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ bozunumu gözlemlenen ilk çarmonyum $c\bar{c}$ rezonansı olan J/ψ durumunu içerdiğinden yapısında $c\bar{c}$ bulunması doğal olarak beklenir. c kuarkın kütlesi $1.27\,GeV$ olup karşıt-kuarkının da kütlesi aynı olduğundan saf $c\bar{c}$ toplam kütlesi $2.54\,GeV$ olur. $X(3872)$'nin kütlesi geleneksel mezon tasvirinde tılsım ve karşıt-tılsım kuarklarının kütleleri toplamından büyüktür. $X(3872)$'nin yapısını açıklamak üzere daha öncede belirtildiği gibi bir çok model önerilmiştir. Bunlardan en popüler olanı hadronik molekül modelidir. Bunun en önde gelen sebebi $X(3872) \rightarrow D^0 D^{*0}$ bozunumunun baskın olarak gözlenmesidir (Aushev vd, 2010). Ayrıca yakın zamanda LHCb'nin yapmış olduğu hassas D^0 kütle ölçümleri $D^0\bar{D}^{0*}$ ve $X(3872)$'nin kütle farklarını $M_{D^0\bar{D}^{0*}} - M_{X(3872)} = 0.16 \pm 0.26\,MeV$ olarak belirlemiştir (Aaij vd, 2013b). Daha önceki çalışmalarda $X(3872)$'nin zayıf bir $D^0\bar{D}^{0*}$ bağlı durumu, diğer bir adla hadronik molekül olduğu önerilmiştir (Törnqvist, 2004; Swanson, 2004; Gamermann vd, 2010). Ayrıca hadronik molekül yaklaşımı J^{PC} kuantum sayısının 0^{-+} veya 1^{++} ve izospininin $I = 0$ olabileceğini söylemektedir (Törnqvist, 2004). $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$ bozunması BaBar deneyinde gözlemlenmiş ve $X(3872)$ içeriğinde mümkün bir $\chi'_{c1}(3510)$ bileşeninin olabileceği belirlenmiştir (Aubert vd, 2006). χ'_{c1} çarmonyum mezonu klasik mezon tasvirine uyan bir mezondur. $X(3872) \rightarrow \psi(2S)\gamma$ bozunumunu Belle ekibi tarafından gözlemlenmemiş (Bhardwaj vd, 2011) fakat LHCb deneyinde 4.4 standart sapmayla gözlemlenmiştir (Aaij vd, 2014). Bu verilere dayanarak $X(3872)$ rezonansının χ'_{c1} ve $D^0 D^{*0}$'ın bir bağlı durumu yani molekülü olduğu düşünülmektedir (Aushev vd, 2010).

$X(3872)$ yapısını açıklamaya çalışan diğer modellere örnek verecek olursak; Barnes vd (2005) çalışmalarında $X(3872)$'yi $P - dalga$ çarmonyumu olarak ele almış ve yapısında $\chi_{c1}(2P)$'nin bulunduğu öne sürmüşlerdir. Faccini vd (2012) yakın zamanda $X(3872)$'yi tetrakuark modelinde ele alan çalışmaları bir derleme olarak sunmuştur. Dubynskiy ve Voloshin (2008) hadro-kuarkonyum modeli kullanarak $X(3872)$'yi ve çarmonyum spekturumundaki diğer bazı mezonları ($Y(4.26)$, $Y(4.32 - 4.36)$, $Y(4.66)$ ve $Z(4.43)$) çalışmışlardır. Bu ve benzeri diğer durumlar XYZ durumları olarak bilinir. Takeuchi vd (2014) hibrit model kullanarak yaptıkları çalışmada $X(3872)$'nin içeriğini ve B −bozunumlarındaki durumlarını tartışmışlardır. Seth (2005) $X(3872)$'yi çarmonyumun vektör durumları ile vektör glüontopunun (glueball) bir karışımı olarak açıklamayı önermiştir.

Valderrama (2012), $X(3872)$, $Z_b(10610)$ ve $Z_b(10650)$ gibi ağır mezon molekülleri olduğu varsayılan durumları etkin alan teorisi kullanarak (EAT), tek pion değiş-tokuşu (TPD) potansiyelinin bu durumların yapısana yaptığı etkiyi incelemiştir.

Moleküler bakış açısı ile baktığımızda $X(3872)$ genel anlamda D ve $\overline{D}^*$ mezonları arasındaki kısa menzilli etkileşimlerin bağlı durum oluşturarak molekül oluşturduğu öne sürülmüştür (Gamerman ve Oset, 2009; Gamerman, 2010). Buna benzer olarak molekül durumunun mezon değiş tokuşu sayesinde oluştuğu bildirilmiştir (Suzuki, 2005; Lee vd, 2009). $X(3872)$'nin kısa menzilli etkileşimlerin sonucunda bağlı durum oluşturduğu ve pionların tedirgemeler olarak teoriye dahil edildiği X-EFT modelleri de mevcuttur (Flemming vd, 2007).

$X(3872)$'nin yapısını aydınlatmak için kullanılan bir diğer bakış açısı; molekülü iki mezonun bağlı durumu olarak değil fakat çoklu kuark durumlarının bir karışımı olarak ele alındığı modeldir. Guo vd (2013), $X(3872)$'yi

$$X(3872) = \alpha_1|c\bar{c}\rangle + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}|D\overline{D}^* + c.c.\rangle \qquad \textbf{(1.4)}$$

olarak ele almış ve ışınımsal bozunumlarda $X(3872)$'nin üretilme olasılıklarını incelemiş ve gözlem için ideal enerji bölgeleri analiz edilmiştir.

$X(3872)$ baz alındığında, dikkat edilmesi gereken önemli durumlardan biri de, tılsımlı kuark-karşıtkuark içerikli ağır mezonların, ağır kuark spin simetrisini (AKSS) dikte etmesidir. Ağır kuark spin simetrisi genel olarak ağır kuarkların (tılsım ve alt kuarkların, c ve b) kütlelerinin sonsuza götürülmesi limitinde Kuantum Renk Dinamiğinin ağır kuarkın spininden bağımsız olarak ele alınabileceğini ve hadronik durumları hafif serbestlik derecelerinin kuantum sayılarıyla (çeşni, spin, parite vs.) sınıflandırılabileceğini belirtir (Cincioğlu, 2016). $X(3872)$'nin özellikleri ve eşleri AKSS kullanılarak belli yaklaşımlarla incelenmiştir (Nieves ve Valderrama, 2012).

Potansiyel modellerinde yer alan spine bağlı terimler fiziksel gözlenebilirlikleri açıklaması açısından kullanılır. Ağır kuark spin simetrisinde fiziksel özellikler hafif kuarkların spinine bağlıdır. Geleneksel mezon tarifine uymayan mezonları tasvir etmenin bir yolu iki ağır kuark ile iki hafif kuarkın etkileşimine bakmaktır. İki ağır kuarkın bir araya gelmesiyle toplam spin $S_{ağır} = 0$ veya $S_{ağır} = 1$ olur. Diğer iki

kuark bu sisteme eklendiğinde sistemin toplam spini değişecektir. Çizelge 1.2, $L = 0$ için olası spin durumlarını göstermektedir (Özpineci, 2014).

Çizelge 1.2. $L = 0$ için J^{PC} değerleri

$S_{ağır}$	S_{hafif}	J^{PC}
1	1	2^{++} 1^{++} 0^{++}
0	1	1^{+-}
1	0	1^{+-}
0	0	0^{++}

AKSS'ye göre S_{hafif} spin sayıları eşit olan durumlar aynı kütleye sahip olmalıdır. Bu tez çalışmasında AKSS'nin öngördüğü yaklaşık dejenerelik KRDTK yönteminden elde edilecektir.

Matheus ve Nielsen (2007), $X(3872)$ için KRDTK yöntemini uygulamış ve kütlesini $M_X = 3.94 \pm 0.17\ GeV$ olarak bulmuşlardır. Sonuçlarındaki belirsizliğin c kuarkının kütlesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir.

Navarra ve Nielsen (2006), deneysel olarak elde edilen (BELLE, 2003) $\frac{Br(X \to J/\psi \pi^+ \pi^- \pi^0)}{Br(X \to J/\psi \pi^+ \pi^-)} = 1.0 \pm 0.4 \pm 0.3$ değerini KRDTK yöntemiyle çalışmışlar ve bozunum genişliğini deneysel değerden çok büyük bulmuşlardır. Arakesit alanlarının (interpolating field) $J/\psi\, V$ molekül bileşenine sahip olduğunu fakat bunun $X(3872)$'nin sahip olduğu çok küçük bozunum genişliğini açıklayamadığını bildirmişlerdir. Başka arakesit alanları kullanılarak $X(3872)$ yapısının aydınlatılabileceğini önermişlerdir.

Guo vd. (2015), $X(3872)$'nin ışınımsal geçişlerinin yapısı hakkında neler gösterebileceğini çalıştıkları makalelerinde kuark modelin $X(3872)$'yi radyal uyarılmış bir $\chi_{c1}(2p)\ c\bar{c}$ durumu olarak önerdiğini belirterek ışınımsal geçişlerin ve $\frac{Br(X \to \gamma \psi')}{Br(X \to \gamma J/\psi)}$ dallanma oranının $X(3872)$'nin uzun mesafe yapısına çok zayıf bir şekilde duyarlı olduklarını bulmuşlardır. Bunun $X(3872)$ için baskın bir şekilde hadronik molekül olma durumunu dışarlamadığının da altı çizilmiştir. Hadronik

molekül durumunu çalışmak için uzun mesafe fiziğine duyarlı olan $X \to D\overline{D}\gamma$ ve $X \to D\overline{D}\pi$ bozunumlarının çalışılması gerektiğini bildirmişlerdir.

Baru vd. (2015) $X(3872)$ mezonunu ağır kuark spin simetrisini kullanarak inceledikleri çalışmalarında eğer $X(3872)$, $D\overline{D}^*$'ın $J^{PC} = 1^{++}$ kuantum sayılı moleküler durumuysa ağır kuark limitinde $X(3872)$ ile dejenere olan üç tane daha durumun ortaya çıkacağını bildirmişlerdir. Bu durumların kuantum sayıları 0^{++}, 1^{+-} ve 2^{++}'dır.

Nieves ve Valderrama (2012), temas mesafeli (diğer bir deyişle pion alışverişsiz) etkin alan teorisinde ağır kuark spin simetri durumunda $X(3872)$'nin $J^{PC} = 2^{++}$ kuantum sayılı bir eşi ve bu eşin kütlesini de dikkate alarak $X(4012)$ olabileceğini belirtmişlerdir. $X(3915)$'in $J^{PC} = 0^{++}$ kuantum sayılı bir $X(3872)$ ağır kuark spin simetri eşi olduğu kabulünde 6 tane daha $D^*\overline{D}^*$ moleküler durum tahmin etmişlerdir.

Zhou vd. (2015), $X(3915)$ ve $X(3930)$'un aynı tensör durumu olup olmayacaklarını tartıştıkları çalışmalarında $J^{PC} = 0^{++}$ durumu olan $X(3915)$'in $\gamma\gamma \to D\overline{D}$ ve $\gamma\gamma \to J/\psi w$ bozunma verileri ışığı altında her iki kanalda da $J^{PC} = 2^{++}$ durumu olarak ortaya çıktığını ve bunun $X(3915)$ ve $X(3930)$'un $J^{PC} = 2^{++}$ durumu olarak sayılabileceğini göstermişlerdir.

Baru vd. (2017), Zhou vd. (2015) makalesindeki modeli esas alarak yaptıkları çalışmada $X(3915)$ ve $X(3930)$'un, $X(3872)$'in moleküler resminde spin-2 eşi olup olmadığını tartışmışlardır. Tensör molekül için helisite-0 bileşeninin yokolduğu ve helisite-2'nin yüzeysel bağlı durumunun doğal bir şekilde var olabileceğini göstermişlerdir. Bununla birlikte $D^*\overline{D}^*$ eşiğinin $100\ MeV$ altında olan $X(3930)$ için helisite-2'nin baskın olmasının bir *a priori* nedeninin olmadığı altı çizilerek, Zhou vd. (2015) makalesindeki tensör modelin moleküler bir durum olabileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca eğer $X(3915)$, $D^*\overline{D}^*$ hadronik molekülüyse var olan deney verilerine göre bu durumun skaler olduğunu, diğer yandan en yakın tensör durumunun helisite-0 katkısı baskın olduğu durumda $X(3915)$ yapısının biraz daha egzotik hale geleceğini bildirmişlerdir.

Chen vd. (2013) $X(3872)$'yi $J^{PC} = 1^{++}$ kuantum sayılı çarmonyum hibrit ve $\overline{D}D^*$ moleküler durumlarının bir karışımı olarak ele aldıkları çalışmalarında karışım parametresi tanımlayarak toplam kuralları oluşturmuşlardır. Saf molekül

durumundan itibaren bu parametre arttıkça $X(3872)$ kütlesine yakın değerler elde edildiğini belirtmişlerdir.

Takizawa ve Takeuchi (2013), $X(3872)$'yi $D^0\overline{D}^{*0}$ ve D^+D^{*-} moleküler durumlarına bağdaşan öz bir $c\bar{c}$ durumu olarak ele alıp incelemişlerdir. $X(3872)$'nin yapısında sadece $D^0\overline{D}^{*0}$ hadronik molekülünün olmadığını, çarmonyum-hadronik molekülünün bir hibrit durumu olduğu elde edilmiştir. İnceleme socunda $X(3872)$ içeriğinde $\%\,6\,c\bar{c}$ çarmonyum, $\%\,69$ izoskaler $D\overline{D}^*$ ve $\%\,26$ izovektör $D\overline{D}^*$ olduğunu bulmuşlardır.

$X(3872)$'nin gerçek bir molekül olamayacağını bildirilen çalışmada (Coito vd, 2013) $X(3872)$ dalga fonksiyonunun $c\bar{c}$ bileşenini, ${}^3P_0$ mekanizmasıyla neredeyse serbest $s-dalga$ $D^0\overline{D}^{*0}$'a bağdaşan ${}^3P_1$ $c\bar{c}$ durumu yoluyla incelenmiştir. İki bileşenli dalga fonksiyonu, farklı bağlanma enerjileri ve geçiş yarıçapı a üzerinden hesaplandığında önemli bir $c\bar{c}$ bileşeninin olduğu görülmüştür. $D^0\overline{D}^{*0}$ dalga fonksiyonunun merkezden uzaktaki kısmı zayıf bağlanmada, $0.16\,MeV$ bağlanma enerjisi ve $2-3\,GeV^{-1}$ a değerinde $c\bar{c}$ olasılığı $\%\,7-11$ arasında çıkmıştır. Ayrıca $X(3872)$ yarıçapı kok değeri $7.8\,fm$ olarak elde edilmiştir. $s-dalga$ $D^0\overline{D}^{*0}$'ın saçılma uzunluğu $11.6\,fm$ olduğu ve diğer veriler dikkate alındığında $X(3872)$'nin saf bir mezon-mezon molekülü olmadığını hatta egzotik kuantum sayılarına sahip bir mezonik sistem de olmadığı sonucuna varmışlardır. Bunun sebebi olarak ilgili kuark-karşıtkuark sistemlerinin kaçınılmaz olarak karışmasını belirtmişlerdir.

KRD toplam kuralları pek çok hadronik niceliğin hesaplanmasında kullanılabilen bir yöntemdir. KRD toplam kuralları kuark kütleleri, hadron kütleleri, bozunma sabitleri, hadron form faktörleri gibi çeşitli niceliklerin analizinde kullanılabilmektedir (Colangelo ve Khodjamirian, 2000). Bu yaklaşımda ele alınan temel nesne ise ilişkilendirme fonksiyonudur (Matheus vd, 2009b). Bu tez kapsamında ele alınan mezonlar için ilişkilendirme fonksiyonu, mezonun kuantum sayılarını veren akımlar ile oluşturulan iki nokta ilişkilendirme fonksiyonu ele alınır:

$$F(q) \equiv i\int d^4x\, e^{iqx}\langle h_i|T[\mathrm{J(x)J^{\dagger}(0)}]|h_f\rangle. \qquad \textbf{(1.5)}$$

Burada T zaman sıralı çarpımı, J'ler ilgili hadronu (hadronları) temsil eden akımları ve $|h_i>$ ve $|h_f>$ ise sırasıyla ilk ve son fiziksel durumları ifade etmektedir. Akımlar ve hadronik durumlar incelenecek niceliğin ne olduğuna bağlı olarak seçilir. Literatüre göre, bir mezonun kütlesinin hesap edilmesi için şu fonksiyonu ele almak gerekir (Matheus, 2009; Hidalgo-Duque vd, 2013):

$$F(q) \equiv i \int d^4x\, e^{iqx} \langle 0 \big| T[\mathrm{J(x)J^{\dagger}(0)}] \big| 0 \rangle. \tag{1.6}$$

$X(3872)$'nin kuantum sayıları 1^{++} olduğundan, bu kuantum sayılarına uygun akımlar seçilir (Hidalgo-Duque vd, 2013). KRD toplam kurallarında temel yaklaşım, iki nokta ilişkilendirme fonksiyonunun hadronik parametreler cinsinden (fenomenolojik kısım) ve KRD unsurları (kuark ve gluon alanları) cinsinden (KRD kısmı) yazılmasıdır. Fonksiyonu bir saçılma integrali (genliği) olarak ifade etmek mümkündür. Colangelo ve Khodjamirian (2000) bu fonksiyonu şöyle ifade etmişlerdir:

$$F(q) = \frac{A(q^2)}{q^2 - m_R^2} + \int_{s_0}^{\infty} \rho(s)(s - q^2)\ ds. \tag{1.7}$$

Burada m_R ilgili rezonansın kütlesi, A momentum transferini temsil eden bir büyüklük ve $\rho(s)$ ilgili rezonanstan yüksek enerjili durumların oluşturduğu ve yaklaşık olarak sürekli olduğu varsayılan spektral yoğunluktur.

Bu tez kapsamında ilişkilendirme fonksiyonu, yaklaşık olarak yoğuşlaşmış birden fazla rezonans ($X(3872)$ ve eşleri) için hesaplandı. $X(3872)$ ve eşlerinin fiziksel özellikleri ile kütleleri ve izospin yapıları hassas bir şekilde incelendi.

İkinci bölümde kuramsal temeller detaylıca verilmektedir. Kuantum Elektrodinamik ve Kuantum Renk Dinamiği bu bölümün başlıca konularıdır.

Üçüncü bölümde tezde kullanılan Kuantum Renk Dinamiği Toplam kuralları geniş kapsamda verilmektedir. Taban seviyesi harmonik salınıcı enerjisi ve B mezonu kütlesinin bulunması örnek olarak ele alındı.

Dördüncü bölümde araştırma bulguları yer almaktadır. Bu bölümde $X(3872)$ eşlerinin spin durumlarına göre kütleleri incelenmiş ve kütle analizi yapıldı.

Beşinci ve son bölümde elde edilen sonuçlar tartışılmış ve literatürdeki teorik ve deneysel çalışmalarla karşılaştırıldı.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde Kuantum Elektrodinamiğe ve Kuantum Renk Dinamiğine genel bir giriş verilmiştir.

2.1 Kuantum Elektrodinamiği

Kuantum Elektrodinamiği (KED) yüklü ve spini $1/2$ olan fermiyonik alanlar ile kütlesiz, yüksüz ve spini 1 olan fotonların birbirleriyle olan etkileşimini açıklayan kuramdır. Skaler, vektör ve tensör alanlar için de KED oluşturulabilir. Modern alan teorilerinin bir çoğu KED üzerine inşa edilmiştir. Temelinde elektronların, pozitronların ve fotonların etkileşimine dayanan KED ağır leptonlara da (μ ve τ gibi) uygulanabilen bir kuramdır.

KED'in Lagranjiyeni

$$\mathcal{L}_{KED} = \bar{\psi}(x)\left(i\gamma_\mu D^\mu - m\right)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

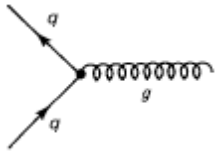
ile verilir. Bu ifadede $\psi(x)$ fermiyon alanını, m fermiyonun kütlesini, $D_\mu = \partial_\mu - ig_s A(x)$ kovaryant türevi, γ_μ Dirac matrislerini ve $F^{\mu\nu}$ elektromanyetik alan tensörünü gösterir. Lagranjiyendeki $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ terimi kinetik terimdir ve yerel simetriyi korumak adına yapılan ayar dönüşümlerinden kaynaklanır. Kinetik terim olmasa da Lagranjiyenin ayar simetrisi vardır. KED abelyen bir kuram olduğundan ağaç mertebesinde (tree level) foton-foton etkileşimine izin vermez. Yüksek mertebelerde bu tip etkileşmelerin olabileceği öngörülmüştür.

2.2 Kuantum Renk Dinamiği

Kuantum Renk Dinamiği (KRD) güçlü nükleer kuvvet etkileşmelerinin kuramıdır ve kuarklar ile glüonlar arasındaki güçlü etkileşmeyi açıklayan bir Kuantum Alan Teorisidir. KRD renormalize edilebilen ve abelyen olmayan $SU(3)$ ayar alanı kuramıdır. KRD'ye göre kuarklar renk yükü adı verilen yeni bir kuantum sayısı taşırlar. Renk yükü ile elektrik yüküne sahip kuarklar güçlü nükleer kuvvet ve elektromanyetik kuvveti hissettikleri gibi zayıf nükleer kuvveti de hissederler. Glüonlar da bu renk yükünü taşırlar ve fotonlardan farklı olarak kendi aralarında

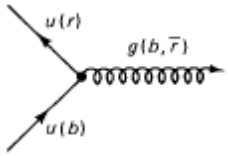
etkileşime girebilirler. Elektrik yükü taşımamalarından dolayı elektromanyetik kuvveti hissetmezler.

Güçlü etkileşim kuarkların ve glüonların taşıdıkları renk yükünden dolayı oluşur. KRD'de üç çeşit renk yükü (kırmızı, yeşil, mavi) söz konusudur. KRD'deki en temel süreç kuark ve glüon etkileşimidir. Şekil 2.1'de bu etkileşim temsili olarak gösterilmektedir.



Şekil 2.1. KRD'de yer alan temel etkileşimlerden biri olan kuark-glüon etkileşimi (Griffiths, 2008)

$kuark \rightarrow kuark + glüon$ veya $kuark + glüon \rightarrow kuark$ etkleşiminde kuarkların çeşnileri değişmez fakat renk yükleri değişebilir. Şekil 2.1'de gösterilen etkileşmeyi örnek alırsak etkileşime giren bir u kuark glüon alışverişinden sonra da u kuark olarak yoluna devam eder, d kuark ya da başka bir kuarka dönüşemez. Renk yükü olarak eğer u kuark kırmızı renk yüküne sahipse etkileşimden sonra mavi renk yüküne sahip olabilir. Etkileşim sonrasında renk yükü korunumlu olduğundan kuarklar arasındaki renk farkını glüon taşır. Dolayısıyla glüonlar iki renkli olmalıdır: bir birim pozitif bir birim de karşıt renk yük. Etkileşime giren kuark kırmızı renk yüküne ve etkileşimden sonra mavi renk yüküne sahipse bu etkileşimde rol alan glüon kırmızı-karşıtmavi renk yüküne sahiptir. Buna benzer bir etkileşim Şekil 2.2'de gösterilmiştir:



Şekil 2.2. Renk yükü taşıyan kuark ve glüon etkileşimi (Griffiths, 2008)

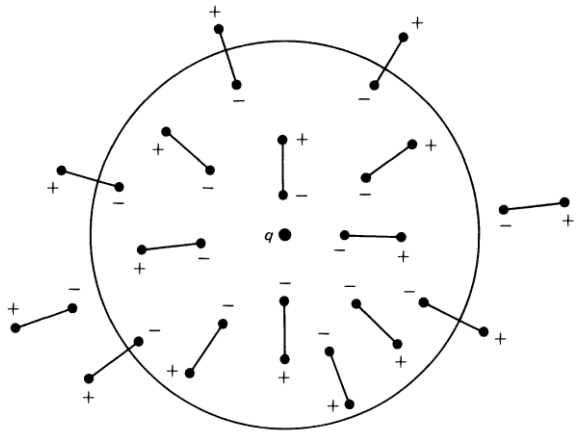
Kuarkların ve glüonların dinamiği KRD Lagranjiyanı tarafından belirlenir:

$$\mathcal{L}_{KRD} = \bar{\psi}(x)\left[i\gamma_\mu D^\mu - m\right]\psi(x) - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}(x)G^{\mu\nu}_a(x). \qquad \textbf{(2.2)}$$

Burada ψ kuark alanı, m kuark kütlesi, $D_\mu = \partial_\mu - ig_s A(x)$ kovaryant türev, g_s etkileşme sabiti ve $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g_s f^{abc} A_{\mu,b} A_{\nu,c}$ glüon alanları olup f^{abc} yapı faktörleridir. Bu Lagranjiyen yerel ayar değişmezliğine dayanan, renormalize edilebilen ve abelyen olmayan bir Kuantum Alan Teorisini tanımlar. KRD'de *asimtotik özgürlük* ve *hapsolma* gibi iki özellik bulunur. Bununla birlikte hapsolmanın KRD'nin ilkelerinden türetilip türetilemeyeceği henüz belli değildir. Dolayısıyla *hapsolmanın* KRD'nin bir ayırt edici özelliği olup olmadığı tartışma konusudur.

2.2.1 Asimptotik Özgürlük

Kuantum Alan Teorisinde Heisenberg belirsizlik ilkesinin enerji-zaman $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ haline göre boşlukta kısa süreli elektron-pozitron çiftlerinin oluştuğu ve elektronların bu pozitronları kendine çekerek ve elektronları iterek boşluğu kutuplu (polarize) hale getirdiği anlaşıldı. Elektrik yükü olan bütün parçacıklar bu olayı gerçekleştirebilir. Bu elektron-pozitron çiftlerine sanal parçacıklar adı verilir ve deneysel olarak doğrudan gözlemlenemezler. Bir q yükü etrafında boşluğun kutuplanması Şekil 2.3'te gösterilmektedir.



Şekil 2.3. Bir yükün etrafındaki boşluğun kutuplanması (Griffiths, 2008)

Bu kutuplanma olayı elektron yükünün etkileşme sabitininin ve kütlesinin perdelenmesine neden olur. Eğer yüke doğru yaklaşılırsa kutuplanma etkilerinin azalacağı ve yükün "çıplak" değerininin artacağı görülür. Kuantum

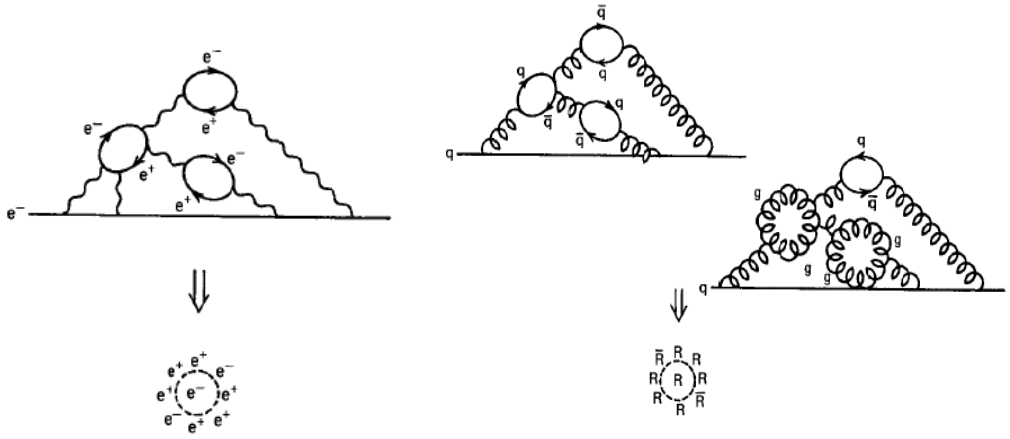
Elektrodinamiğinde gerçekleşen bu durum alan teorilerinde de karşımıza çıkar. Serbest ve etkileşim bileşenlerine sahip olan bir Hamiltonyeni gözönüne alalım:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \lambda \widehat{H}'. \qquad \textbf{(2.3)}$$

Bu toplam $\widehat{H}$ Hamiltonyeni ile tanımlanan durumun vakumla etkileşimi, $\widehat{H}_0$ Hamiltonyeni ile tanımlanan durumun vakumla etkileşiminden farklı olacak ve yeni parçacık-karşıtparçacıklar ortaya çıkacaktır. Eğer bir deneme yükünü bu alana koyarsak bu yük parçacık ve karşıtparçacıklarla etkileşime girecek ve hatta bunları vakumdan oluşturabilecektir. Oluşan bu parçacık ve karşıtparçacıklar diğer parçacık ve karşıtparçacıklarla etkileşime girebilirler. Çok karmaşık olan bu süreç sonucunda ilk yüke ne olduğu merak edilebilir. İlk yük ve oluşan diğer yükler artık *sankiparçacık (quasiparticle)* olmuşlardır. Sankiparçacıklar etkileşen sistemlerin uyarılmalarıdır (excitations). Serbest parçacık gibi hareket ederler ve kütleleri aynı olmasına karşın enerji momentum ilişkileri farklıdır. Sin ItiroTomonaga yükte ve kütlede oluşan bu sonsuzluğu ortadan kaldırmak için 40'lı yılların başında renormalizasyon kavramını önerdi (Tomonaga, 1946). Buna göre deneylerde ölçülen yük ve kütle vakum etkileriyle perdelenmiş değerlerdir. Vakum etkilerinden kaynaklı kutuplanmalar renormalizasyon yoluyla sonlu hale getirebilir.

KRD'de de bu tip kutuplanmalar görülebilir. Glüonlar renk yükü taşıdıklarından birbirleriyle etkileşebilirler. Hatta bu renk yükü bir birim normal yük bir birim de karşıtyükten oluştuğundan perdelemede negatif etki oluşturabilirler. KED'de ve KRD'de oluşan bu vakum kutuplanmaları karşılaştırmalı olarak Şekil 2.4'te verilmiştir. KRD vakumunda oluşan sanal glüonlar kuarkların çevresini sararlar. Dolayısıyla çok kısa mesafelerde renk yükünden oluşan etkileşimin gücü azalır. Diğer bir deyişle kısa mesafelerde kuarklar arasında etkileşme kuvveti zayıflar. *Asimptotik özgürlük* denilen bu olay 1973 yılında Frank Wilczek ve David Gross ile David Politzer tarafından keşfedilmiştir.

Asimptotik özgürlük olayına KRD'nin abelyen olmayan yapısı yönünden bakılacak olunursa abelyen olmayan Kuantum Alan Teorilerinde alanların bizzat kendileri alan kaynağı olurlar. Bu alanlar yükün etrafında aynı işaretli renk yükleri oluşturur ve bu yükler ilk yükün etrafını bir bulut gibi sararlar. Kuantum Elektrodinamikten farklı olarak ne kadar uzaktan bakılırsa yükün etkileşme sabiti o kadar artar.

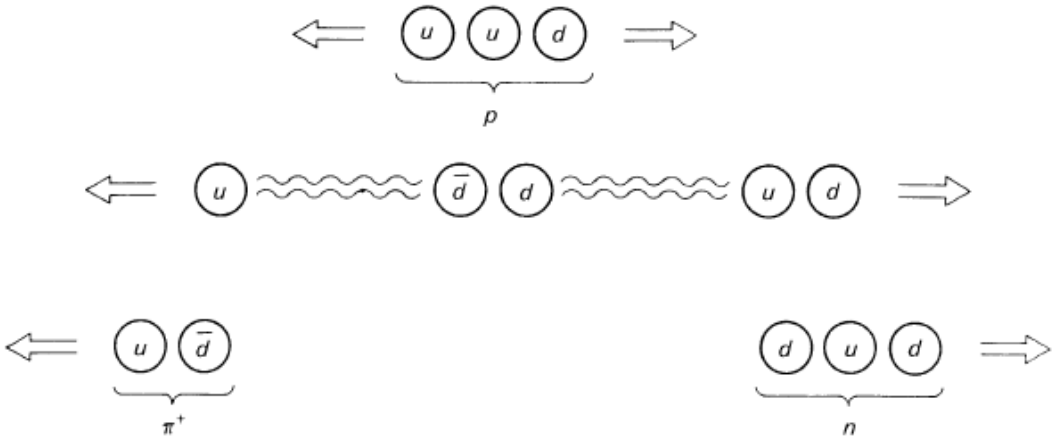


Şekil 2.4. Sol tarafta KED'deki, sağ tarafta ise KRD'deki kutuplanma olayı (Halzen ve Martin, 1984)

2.2.2 Hapsolma

Asimptotik özgürlük neticesinde kuarklar küçük mesafelerde serbestçe dolaşan parçacıklar gibi davranır. Glüonlar renk yükü taşıdıklarından kendi aralarında etkileşime girerler. Bu etkileşimin neticesinde renk yükü alan çizgilerinin bir akı tüpü (flux tube) oluşturduğuna inanılır. Kuark-karşıtkuark çiftinden bir kuark serbest hale getirilmeye çalışıldığında bu akı tüpünün enerjisi artar ve yeni kuark-karşıtkuark çiftlerini oluşturabilir. Daha önce de belirtildiği üzere hapsolmanın KRD ilkeleri tarafından çıkarılabilir olduğu henüz ispatlanmamıştır.

Proton iki yukarı kuark (u) ve bir aşağı kuarktan (d) oluşan bir hadrondur ve kuark temsili uud şeklindedir. Protonda yer alan aşağı d kuarkı tek başına gözlemlemek için protona enerji vermek gerekir. Bu enerji KRD vakumunda sanal kuark-karşıtkuark ve glüon-karşıtglüonlar oluşur (glüonun karşıt parçacığı da glüondur). Oluşan bu kuark-karşıtkuarklar protondaki diğer kuarklarla birleşerek yeni parçacıkların ortaya çıkmasını sağlar. Dolayısıyla aşağı kuarkı tek başına gözlemlemek için verilen enerji yeni parçacıkların ortaya çıkmasını sağlayarak tek başına kuark gözlemleme isteğimizi boşa çıkartmıştır. Bu olayın temsili hali Şekil 2.5'te gösterilmektedir.

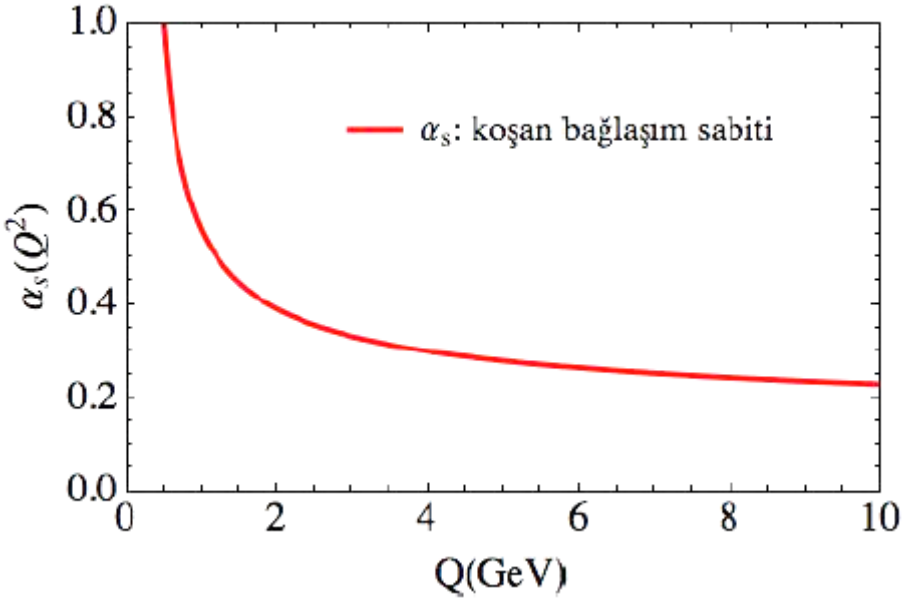


Şekil 2.5. Kuark hapsini gösteren temsili bir durum (Griffiths, 2008)

Asimptotik özgürlük ve hapsolma özellikleri abelyen olmayan grup yapısından kaynaklanır. KED'de foton-foton etkileşimi ağaç mertebesinde izinli değilken KRD'de glüon-glüon etkileşimi izinlidir. g_s kuark-gluon bağlaşım gerilimi parametresi ve α_s bağlaşım sabiti arasındaki ilişki

$$\alpha_s = \frac{{g_s}^2}{4\pi} \tag{2.4}$$

olmak üzere kuark-glüon bağlaşım sabitinin momentumla değişimi Şekil 2.6'da verilmiştir.



Şekil 2.6. Kuark-gluon bağlaşım sabitinin momentumla değişimi (Cincioğlu, 2016)

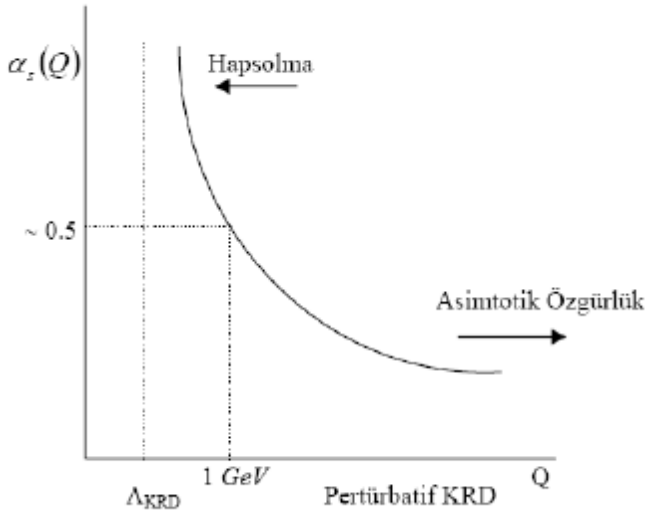
Şekil 2.6'dan da anlaşılacağı üzere aslında bu sabit hangi enerji ölçeğinde ölçtüğümüze göre değişen bir yapıya sahiptir. Büyük momentum değerlerinde kuark-glüon bağlaşım sabiti

$$\alpha_s(Q^2) = -\frac{2\pi}{b\ln(\frac{Q}{\Lambda_{KRD}})} \tag{2.5}$$

formülü ile verilir. Boyutsuz olan b katsayısı

$$b = 11 - \frac{2}{3}n_f \tag{2.6}$$

eşitliğiyle bulunur. Burada n_f kuark çeşni sayısıdır. KRD'nin enerji ölçeği yaklaşık olarak $\Lambda_{KRD} = 200\ MeV$'dir. Bu enerji ölçeğinin üstünde kuarklar, altında ise hadronlar bulunur. α_s'in momentuma göre değişimi ve asimptotik özgürlük ile hapsolma bölgeleri Şekil 2.7'de gösterilmektedir.



Şekil 2.7. Bağlaşım sabitinin momentuma göre değişimi ve asimptotik özgürlük ile hapsolma bölgeleri (Colangelo ve Khodjamirian, 2004)

Şekil 2.7'den de görüleceği üzere yüksek momentumlarda KRD'nin asimptotik özgürlüğünden dolayı tedirgeme (pertürbatif) kuramı kullanılabilir. Düşük momentum değerlerinde kuark-glüon etkileşmeleri güçlü olduğundan tedirgeme teorisi kullanılamaz. Bunun yerine tedirgemesiz yöntemlere başvurulur: KRD toplam

kuralları, Örgü Kuantum Renk Dinamiği, Etkin Alan Teorileri gibi. Bu tezde kullanılan tedirgemesiz yöntem KRD toplam kurallarıdır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde ilk önce tezde kullanılan Kuantum Renk Dinamiği Toplam Kuralları yöntemi verilmiş ve kuantum mekaniksel harmonik titreştiricide ve B mezonunun kütle hesabında bir uygulaması yapılmıştır.

3.1. SVZ Toplam Kuralları

SVZ toplam kuralları 1979 yılında Mikhail Shifman, Arkady Vainstehin ve Valentin Zakharov tarafından mezonlar için önerilmiş (Shifman vd, 1979) ve Boris Lazarevich Ioffe tarafından 1981 yılında baryonlara genelleştirilen güçlü bir yöntemdir (Ioffe, 1981).

KRD güçlü etkileşimlerin kuramıdır. Yüksek enerjilerde başarılı sonuçlar veren KRD'nin düşük ve orta değerli enerji bölgesindeki nükleer fiziğe uygulanması pratikte iki nedenden ötürü zordur. Birincisi bu enerji değerlerinde KRD bağlaşım sabitinin tedirgeme kuramının kullanılmasını imkansız hale getirmesidir. Diğer neden hadronik ve nükleer fizikteki enerji ölçekleri (skalaları) arasındaki uyumsuzluktur. Çekirdeğin yapıtaşı olan hafif kuarkların KRD karakteristik ölçekleri $100\ MeV$'den bir kaç GeV'e kadar değişmektedir. Tipik bir nükleer fizik olgusunun enerji ölçeği ise bir kaç MeV'dir. Örneğin nükleon başına düşen bağlanma enerjisi $10\ MeV$ mertebesindedir ve bu değer nükleonun kütlesinin yaklaşık olarak $\%\ 2$'sine tekabül eder (Cohen vd, 1995). Bu iki enerji ölçeğindeki fizikte yani KRD olguları ile nükleer fizik olguları arasında tutarlı bir ilişki kurmak önemlidir. Etkin alanlar kuramı, kiral tedirgeme kuramı, örgü KRD gibi yöntemler bu ilişkiyi kurmak adına yapılan çalışmalara örnektir.

Kuark modeli baryonları üç kuarkın (ya da karşıtkuarkın), mezonları ise kuark ile karşıtkuarkın bağlı durumu olarak tanımlamaktadır. Bu bağlı durumların kütlesi ve dalga fonksiyonu Schrödinger benzeri bir denklemle bulunabilmektedir:

$$H\psi = (T + V)\psi = E\psi. \qquad \textbf{(3.1)}$$

Burada T kinetik enerji, V ise potansiyel enerji ve ψ dalga fonksionudur. Ağır kuark sistemleri için $(c\bar{c}, b\bar{b})$ Schrödinger denklemi kabul edilebilir bir yaklaşım sunsa da göreli etkiler hesaba katılmalıdır. Potansiyel enerji prensipte KRD'den doğal bir şekilde türetilmelidir fakat KRD'nin kendine özgü yapısından dolayı

potansiyel enerji terimi tam olarak hesaplanamamakta sadece sınır durumlarının şekli tahmin edilebilmektedir.

KRD'ye göre kuarklar arasındaki bir glüon alışverişiyle neticelenen süreçler, Coulomb etkileşimine benzer bir potansiyelle açıklanabilir. Kuarklar renk yükü taşıdıklarından bu potansiyelin etkin olduğu küçük mesafelerde asimptotik özgürlük neticesinde bağlaşım sabiti zayıftır ve burada tedirgeme kuramı uygulanabilir. Renk yükleri arasındaki mesafe arttıkça tedirgeme kuramı uygulanamaz.

SVZ yönteminde vakuma kuarklar enjekte edilir ve dolayısıyla vakum tedirgenmiş olur. Bu tedirgemeler neticesinde KRD'ye ve bağlı durumların oluşması için gerekli olan potansiyel enerji terimine çok hakim olmadan ve hatta Schrödinger benzeri denklemler çözmeden hadronların temel özellikleri elde edilebilir.

Kuantum Renk Dinamiği Toplam Kuralları (KRDTK) olarak da bilinen SVZ toplam kuralında, KRD Lagranjiyanı ve KRD parametreleri ile hadron parametrelerini ilişkilendirilir. Bunların üzerine inşa edilen KRDTK düşük momentum değerlerinde ve mikroskopik ölçeklerde gerçekleşen fiziği açıklar. KRDTK yöntemiyle hadronik olaylar ve özellikleri açıklanabilir: kütle, bozunma sabiti, etkileşme sabiti ve form faktör gibi.

KRDTK yöntemi kuarkların kısa mesafelerde (yüksek momentum değerlerinde) geçerli olan asimptotik özgürlük halinden başlayarak bağlı durumların oluştuğu uzun mesafe bölgelerine (düşük momentum değerlerine) adım adım yaklaşmaktan ibarettir. Bu bölgede asimptotik özgürlük olmayacağından kuarkların hapsolma bölgesine doğru yaklaşıldıkça kuarklar yeni rezonanslar ortaya çıkaracaktır. Oluşan bu yeni rezonanslar KRD vakumunda tedirgemesiz etkiler oluşturacaktır. KAT'ın önemli bir özelliği teorinin ilgilendiği vakumun beklenen enerji değerinin sıfırdan farklı olabilmesidir. Bir diğer özelliği ise kuantum mekaniğinden farklı olarak parçacıkları yaratan ve yok eden işlemcilere (operatörlere) sahip olmasıdır. Dolayısıyla KRD vakumundaki bu tedirgemesiz etkiler kuark ve glüon yoğunluk işlemcilerinin vakumdaki beklenen değerinin sıfırdan farklı olmasıyla ortaya çıkar.

KRDTK yönteminde momentum uzayındaki işlemcilerin ilişkilendirme fonksiyonları kullanılır. Her operatör ilgili hadronu oluşturacak kuark veya kuark-glüon alanlarından oluşturulur. Bu işlemcilere arakesit alanları da denir. KRDTK'nın temel fikri ilişkilendirme fonksiyonunun KRD kısmı ile fenomenolojik kısmının karşılaştırılmasıdır. Dualite kavramı olarak bilinen bu karşılaştırmada fiziksel

(hadronik) serbestlik dereceleri ile kuark ve glüon serbestlik dereceleri arasında bir ilişki kurulur. KRDTK hesabı başlıca üç kısımdan oluşur (Cohen vd, 1995):

1. İşlemci Çarpım Açılımı (İÇA) yoluyla KRD serbestlik derecelerini içeren uygun bir ilişkilendirme fonksiyonu tanımlamak.
2. Spektral yoğunluk için basit bir kabul içeren dispersiyon bağıntısı aracılığıyla fiziksel ara durumlar üzerinden aynı ilişkilendirme fonksiyonunu tanımlamak.
3. Bu iki kısmı karşılaştırarak çalışılan hadronik durumu karakterize eden spektral fonksiyonun parametrelerini elde etmek.

3.2. İlişkilendirme Fonksiyonu

KRDTK'da düşük enerjide gerçekleşen süreçlerle, KRD vakumundaki tedirgemesiz olan kuark kondensatları cinsinden yazılan bir ilişkilendirme fonksiyonu kurulur. Bu ilişkilendirme fonksiyonu ilgilenen hadronların özelliklerini verecek uygun arakesit (interpolating) akımı cinsinden oluşturulur. KRD vakumunda $x = 0$ uzay-zaman noktasına kuarklar yerleştirilir ve belirli bir x uzay-zaman noktasına kadar olan gelişimi incelenir. Bu süreç

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x \, e^{iqx} \, \langle 0|T(j(x)\bar{j}(0))|0\rangle \tag{3.2}$$

ilişkilendirme fonksiyonuyla betimlenir. Burada T zaman sıralı işlemci çarpımını (sağdan sola doğru zaman ait değişkenler artacak şekilde), $j(x)$ kuark alanlarından ve gama matrislerinden oluşan akımı, q kuarkların toplam momentumunu ve $|0\rangle$ ise taban durumunu göstermektedir. $\bar{j}(0)$ orijinde vakumdan kuark ve/veya glüonları yaratırken, $j(x)$ bu kuark ve/veya glüonları x noktasında yok eder. Dolayısıyla bu matris elemanı parçacıkların orijinden x noktasına ilerlemesinin genliğidir.

İlişkilendirme fonksiyonundaki arakesit akımı mezonlar için genel olarak

$$j_\Gamma(x) = \bar{\psi}_i \Gamma \psi_j \tag{3.3}$$

şeklinde alınır. Burada $\bar{\psi}_i$ ve ψ_j kuark alanlarını ve Γ tensör yapısını göstermektedir. Hadronun kuantum sayılarına bağlı olarak mezonların ara kesit akımları, kuark alan operatörleri cinsinden Çizelge 3.1'deki gibi yazılabilir.

Çizelge 3.1. Çarmonyum spektrumunu açıklamada kullanılan akımlar

J^{PC} sayıları	Arakesit akımı	Mezon türü
$J^{PC} = 0^{++}$	$J_S = \bar{\psi}_i \psi_j$	Skaler mezon
$J^{PC} = 0^{-+}$	$J_P = \bar{\psi}_i \gamma_5 \psi_j$	Sözde skaler mezon
$J^{PC} = 1^{--}$	$J_V = \bar{\psi}_i \gamma_\mu \psi_j$	Vektör mezon
$J^{PC} = 1^{++}$	$J_A = \bar{\psi}_i \gamma_\mu \gamma_5 \psi_j$	Aksiyel vektör mezon

$q^2 < 0$ için ilişkilendirme fonksiyonuna ana katkı kısa mesafelerden gelir. $q^2 > 0$ için (kuarklar arası mesafe arttıkça) kuarklar hadronları oluşturmaya başlar. Daha açık bir şekilde q^2, işlemcinin içindeki kuarkların kütle toplamının karesinden çok daha küçük ise $q^2 \ll \sum m_q^2$, kuarklar ya da en azından bir kuark oldukça sanal olacağından uzun mesafeler katedemez ve katkı sadece kısa mesafelerden gelir. İlişkilendirme fonksiyonu iki farklı şekilde yazılarak uzun ve kısa mesafe nicelikleri karşılaştırabilir:

- $j(x)$ akımının kuark yapısına göre seçildiği ve uzun-kısa mesafe etkilerini birbirinden KRD parametrelerini içeren işlemci çarpım açılımı (İÇA) kullanılarak ayrılan kısmı. İşlemci çarpım açılımı ilgili bütün kondensatların KRD boşluğuna olan etkilerini kapsar. Bu kısımda KRD tedirgemeleriyle hesaplanan nicelikler vakumda oluşan kondensatlar cinsinden tanımlanır. Bu kısma KRD ya da teorik kısım denir.
- $j(x)$ akımının kuark yapısına girmeden spinörler (mezonlar için vektör) tarafından belirlendiği ve hadronik serbestlik derecelerine bağlı olarak yazılan kısmı. Hadronik kısım olarak da bilinen bu kısım, yüksek enerjili uyarılmalardan gelen katkıların oluşturduğu dispersiyon bağıntısı içerir. Hadronik durumların arasına tamlık bağıntıları yazılarak oluşturulan bu kısımdan kütle, bozunma sabiti vb. özellikler elde edilir. Bu kısma hadronik (fiziksel) ya da fenomenolojik kısım denir.

İlişkilendirme fonksiyonu $q^2 > 0$ bölgesinde hadronlar cinsinden, $q^2 \ll 0$ bölgesinde (Derin Öklit Bölgesi) ise işlemci çarpım açılımı yapılarak yazılır. KRD nicelikleri, bu ilişkilendirme fonksiyonunun iki kısmından gelen katkıların katsayıları eşitlenip Borel dönüşümü yapılarak elde edilir.

3.2.1. İşlemci çarpım açılımı (İÇA)

İşlemci Çarpım Açılımı (İÇA) genel anlamda bir Taylor açılımıdır. İlişkilendirme fonksiyonun içinde birisi $x = 0$'da diğeri x noktasında iki tane akımın çarpımı vardır. Bu çarpımın $x = 0$ civarında Taylor açılımı İÇA olarak adlandırılır. Böylece ilişkilendirme fonksiyonunun içindeki matris elemanı, x'e bağlı fonksiyonlar ve kondensatlar (yoğuşmalar) cinsinden yazılabilir.

Kenneth Geddes Wilson tarafından 60'lı yılların sonunda tanımlanan İÇA, fiziksel süreçte meydana gelen büyük ve küçük mesafelerdeki etkileri birbirinden ayırır. İÇA yapılarak arakesit akımlarının oluşturduğu ilişkilendirme fonksiyonu, Wilson katsayıları ile kuark ve gluon alanlarından oluşan yerel işlemcilerin beklenen değer çarpımının toplamı olarak ifade edilir. Bu beklenen değerler kondensat olarak adlandırılır.

Zaman sıralı iki operatörün $x = 0$ civarinda İÇA'sı şu şekilde verilir:

$$T\{A(x)B(0)\} = \sum_n C_n^{AB}(x)\hat{O}_n(0). \tag{3.4}$$

C^{AB} katsayısı Wilson katsayıları ve $\hat{O}$ ise kuark ve gluon alanları tarafından oluşturulan yerel işlemcidir.

İlişkilendirme fonksiyonuna İÇA yapılarak

$$\Pi^{KRD}(q^2) = i\int d^4x\, e^{iqx}\ \langle 0|T(j(x)\bar{J}(0))|0\rangle = \sum_n C_n(q^2)\langle 0|\hat{O}_n|0\rangle \tag{3.5}$$

eşitliği elde edilebilir. (3.5) eşitliğinin sağ tarafı elde edilirken Fourier dönüşümü yapılmıştır. İlişkilendirme fonksiyonu $q^2 < 0$ bölgesinde İÇA yapılarak yazılabilir. Wilson katsayıları sadece kısa mesafeli etkileri içerir ve tedirgeme yöntemiyle elde edilebilir. $\hat{O}$ yerel işlemcileri ise uzun mesafeli etkileri içerir. KRDTK hesabında tedirgeme kuramının uygulanabildiği bölgeden elde edilen sonuçlar Wilson katsayılarının içindeyken geri kalan bütün tedirgemesiz etkiler işlemcilerin vakum beklenen değerleri içine konur. Böylece büyük ve küçük mesafelerdeki etkiler birbirinden ayrılmış olur.

(3.5) eşitliğinde $\hat{O}_n$'nin vakum beklenen değerini de işleme almak gerekir. Tedirgeme kuramında $\langle 0|\hat{O}_n|0\rangle = 0$ olarak tanımlanır. Fakat KRD'nin abelyen olmayan yapısından dolayı tedirgemesiz etkiler vakumun yapısını değiştirir ve n'nin yüksek değerleri için vakum beklenen değeri sıfırdan farklı olabilir. Bu sıfırdan farklı beklenen değer matris elemanı, uzun mesafelerde kuark ve glüon serbest parçacık ilerleticilerinin (propagatörlerinin) tedirgemesiz etkiler ile değiştirildiği gerçeğini ifade eder. Dolayısıyla bu matris elemanları tedirgemesiz olmayan etkileri içerir.

İÇA'da işlemciler boyutlarına göre sıralanırlar. KRDTK'da vakumun beklenen değerleriyle işlem yapıldığından spini sıfır operatörler hesaba katılır. KRD vakumu yoğuşmalar (kondensatlar) cinsinden ifade edilir. Bir ve iki boyutlu renksiz işlemci yoktur. Bu durumda sonsuz bir toplam olan (3.5) nolu ifade çabuk yakınsar. Çizelge 3.2'de işlemciler ilk altı boyuta göre sıralanmış ve karşılık gelen katkılardaki yoğuşmalar gösterilmiştir.

Çizelge 3.2. Operatör boyutları ve yoğuşmalar

Boyut (n)	Katkı türü
$\hat{O}_0 = 1$	Tedirgeme katkısı
$\hat{O}_3 = \bar{q}q$	Kuark yoğunlaşması (kondensat)
$\hat{O}_4 = G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}$	Glüon yoğunlaşması
$\hat{O}_4 = m\bar{q}q$	Kütle terimli kuark yoğunlaşması
$\hat{O}_5 = \bar{q}\sigma_{\mu\nu}\frac{\lambda^a}{2}G^{a\mu\nu}q$	Kuark-Gluon yoğunlaşması
$\hat{O}_6 = (\bar{q}\Gamma q)(\bar{q}\Gamma q)$	Dörtlü kuark yoğunlaşması
$\hat{O}_6 = f_{abc}G^a_{\mu\nu}G^b_{\nu\sigma}G^c_{\sigma\mu}$	Üçlü glüon yoğunlaşması

Burada $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ ve λ^a Gell-Mann renk matrisleridir. Daha yüksek boyutlu işlemciler $\frac{\Lambda^2}{Q^2}$ oranının büyüklüğüne göre baskılanır. Dolayısıyla ilk birkaç terimden sonra açılımın geri kalan terimleri ihmal edilebilir.

İÇA'da asıl yapılan kısa ve uzun mesafede geçerli olan fiziği ayırmaktır. Bu momentum uzayında, büyük uzaysı momentum ile küçük uzaysı momentum değerlerindeki fiziği ayırmakla aynıdır. KRD'deki durum tedirgemeli fizik (katsayılar) ile tedirgemesiz fiziğin (kondensatlar) ayrışmasıdır. Bu durum, katsayıların tedirgeme yoluyla KRD'den hesaplanabilirken tedirgemesiz fiziğin kondensatlarda izole olduğu fikrini verir. İÇA yapılarak elde edilen ilişkilendirme fonksiyonuyla fenomenolojik ilişkilendirme fonksiyonunun karşılaştırılması pek pratik görünmeyebilir. İÇA kısa mesafalerde (büyük uzaysı momentum değerlerinde) yapılan bir açılımdır. Diğer yandan, spektral fonksiyonda yer alan ve ilişkilendirme fonksiyonunu zamansı momentum değerlerinde domine eden düşük seviyeli uyarılmış durumlar hakkında bilgi sahibi olmak istenir. Bu iki kısmın eşitlenmesi fiziksel durumların toplamı olan fenomenolojik spekral yoğunlukla elde edilir. Fenomenolojik spekral yoğunluk, iyi tanımlanmış düşük enerjili uyarılmış durumlar (hadronlar) hakkındaki bilgiyi koruyarak enerjide yayılır (smear). Diğer yandan bu yayma kısa zamanlara karşılık gelir ki kuark ve glüon terimlerinden İÇA yapılarak elde edilen spektral yoğunluğun dualitesi (iki durumu) yeterli olur (Cohen vd, 1995).

İlişkilendirme fonksiyonunun teorik kısmı, farklı boyutlardaki işlemcilerden gelen tedirgemeli ve tedirgemesiz katkılar hesaplanarak elde edilir. Tedirgemeli katkılar en düşük mertebedeki Feynman diyagramlarından gelen katkılar gözönüne alınarak yapılır. Tedirgemesiz katkılar için Çizelge 3.2'de verilen vakum yoğuşmaları ile orantılı işlemciler kullanılarak elde edilir.

3.2.2. Spektral yoğunluk

Zamana bağlı bir sinyal Fourier dönüşümü ile frekans uzayına taşındığında, bu uzayda hesaplanan istatistiksel yoğunluk gibi nicelikler spektral olarak adlandırılır.

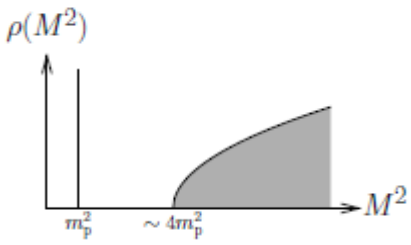
Kuantum Alan Teorisi'nde ilerleticileri (propagatörleri) yazmanın bir yolu da spektral yoğunluk fonksiyonunu kullanmaktır. Skaler bir alan için ilerletici

$$G(x,y) = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2) \Delta(x,y,M^2) \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\rho(M^2)$ spektral yoğunluk, M parçacığın kütlesi ve $\Delta(x,y,M^2)$ ise skaler alan için serbest parçacık ilerleticisidir. $Z = \langle p|\hat{a}_p|\Omega\rangle$, p momentumuna sahip bir parçacığı $|\Omega\rangle$ vakumundan (pertürbeyle uyarılmış vakum) yaratma genliği ve m_p fiziksel kütleyi göstermek üzere

$$\rho(M^2) = 2\pi\delta\left(M^2 - m_p^2\right)Z + (çok\ parçacıklı\ kısımlar) \qquad \textbf{(3.7)}$$

şeklinde bir spektral yoğunluk, $M = m_p$ için tek parçacık katkısına ve çok parçacıklı kısımları (sürekli kısım) içeren bir sürekli dağılıma sahiptir (Lancaster ve Blundell, 2014). Bu spektral yoğunluk Şekil 3.1'de gösterilmektedir.



Şekil 3.1. Spektral yoğunluk fonksiyonu (Lancaster ve Blundell, 2014)

Burada yapılan, ilerleticiyi tedirgemeli olması gerekmeyen rezonans ve süreklilik katkılarına göre ayırmak için spektral yoğunluk üzerinden ayrıştırılmasıdır.

Kuantum Mekaniğinde bağlı durumlar bir potansiyel etkisinde gerçekleşir. Buell ve Shadwick (1995) $V(x)$ potansiyeli için, bir boyutta $\int V(x)dx < 0$ olduğunda her zaman bir bağlı durum olacağını, üç ya da daha yüksek boyutlarda $\int V(x)d^n x < 0$ olsa bile her zaman bir bağlı durumun oluşamayabileceğini göstermişlerdir.

KRD'de bağlı durumların incelenmesi önemli bir konudur. Genel olarak bağlı durumlar Schrödinger benzeri bir denklem çözülerek bulunur. KRD'nin karmaşık doğası ile potansiyel enerji fonksiyonlarını tam olarak bilemememiz KRD'de bağlı durumları geleneksel olarak elde etmeyi zor kılar. Kuantum Alan Teorisinde kuantum mekaniğinden farklı olarak parçacık sayısı korunumlu değildir. Gerekli eşik enerji verildiğinde birden fazla sayıda parçacık oluşabilir. Şekil 3.1'deki taralı bölge bu durumu göstermektedir. Bu parçacıklar etkileşme potansiyeli altında bağlı durum oluşturabilir. Oluşturulan parçacık sayısının bir üst sınırı olmadığı için ilkesel olarak sonsuz sayıda bağlı durum oluşur. Bu durumları Schrödinger benzeri bir denklem çözerek elde etmek imkansızdır. Dolayısıyla farklı bir yöntem gerekmektedir.

Bu yeni yöntemde bağlı durumlar enerjinin bir fonksiyonu olan spektral yoğunluklarla temsil edilir. Hadron spekturumunda her bir bağlı durum bir pik ile temsil edilir. $q^2 > 0$ bölgesinde ilişkilendirme fonksiyonu spektral yoğunluk fonksiyonuyla verilir. $q^2 < 0$ bölgesinde ise ilişkilendirme fonksiyonu İÇA ile elde

edilir. İlişkilendirme fonksiyonun hadronik kısmı $\rho(s)$ spektral yoğunluk yardımıyla dispersiyon bağıntısından yararlanılarak şöyle yazılır:

$$\Pi^{Hadron}(q^2) = \int ds \frac{\rho(s)}{s - q^2 - i\epsilon} + çıkarma\ terimleri. \tag{3.8}$$

Spektral yoğunluk ise ilişkilendirme fonksiyonunun imajiner kısmının alınmasıyla

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi} Im[\Pi(q^2)] \tag{3.9}$$

şeklinde elde edilir.

İlişkilendirme fonksiyonuna seçtiğimiz akımla aynı kuantum sayısına sahip bütün hadronlar katkı verir. KRDTK'da yüksek kütleli hadronların katkısını çıkarabildiği için en düşük seviyeli durumun kütlesi hesaplanabilir. Bu hem $\rho(s)$'teki enerji değeri olan s değerini uygun seçmeyle hem de spektral yoğunluğa dahil edilmeyen yüksek kuantum sayılı durumları dışarıda bırakmakla sağlanır. Çıkarma terimleriyle söylenmek istenen budur. Bu söylenenlere uygun bir spektral yoğunluk şu şekilde yazılabilir:

$$\rho(s) = \delta(s - m^2) + \rho^{sürekli}(s). \tag{3.10}$$

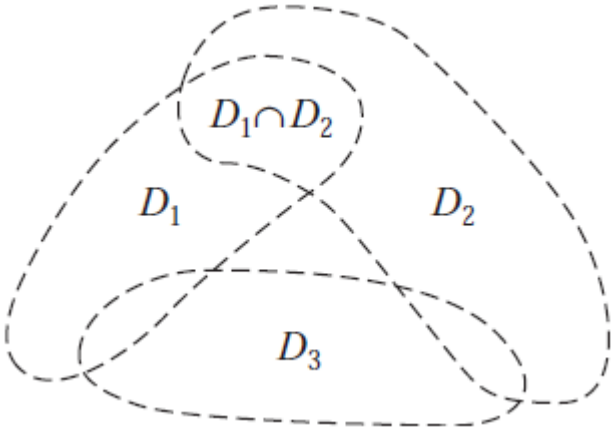
(3.10) ifadesindeki ilk terimle ilişkilendirme fonksiyonundaki akıma karşılık gelen en düşük kütleli rezonans durumu ve $\rho^{sürekli}(s)$ terimi ile ilişkilendirme fonksiyonundaki akıma karşılık gelen büyük kütleli durumlar temsil edilir. Bu durumların, uygun bir s_0 eşik enerji değeri seçilerek bu değerin altında hiçbir katkı vermeyeceği kabul edilir. Bu eşik enerji değerinin üstünde ise spektral yoğunluk İÇA yapılarak

$$\rho^{sürekli}(s) = \rho^{İÇA}(s)\Theta(s - s_0) \tag{3.11}$$

şeklinde yazılabilir (Shifman vd, 1979). Burada Θ Heaviside adım fonksiyonudur ve $s > s_0$ için 1'e diğer durumda 0'a eşittir.

3.2.3. Borel dönüşümü

İlişkilendirme fonksiyonu $q^2 > 0$ bölgesinde hadronlar cinsinden yazılabilir. $q^2 < 0$ bölgesinde de İÇA kullanılarak yazılabilir. Bu iki bölgeyi kıyaslamak için kompleks analizdeki analitik devamlılık (sürdürme) kavramı kullanılır. Şekil 3.2'de gösterildiği gibi kompleks düzlemde D_1, D_2, D_3 ve bunların kesişimleri olan $D_1 \cap D_2$ bölgesi verilsin.



Şekil 3.2. Kompleks düzlemdeki D_1, D_2, D_3 ve $D_1 \cap D_2$ bölgeleri (Brown ve Churcill, 2014)

Eğer D_1 ve D_2 ortak noktalara sahipse, diğer bir deyişle $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ ise D_1 bölgesinde analitik olan bir f_1 fonksiyonun varlığında D_2 bölgesinde analitik olan ve $D_1 \cap D_2$ bölgesindeki her z için $f_2(z) = f_1(z)$ şartını sağlayan bir f_2 fonksiyonu var olabilir. Bu durumda f_2 fonksiyonu, D_2 bölgesinde f_1 fonksiyonunun analitik devamıdır denir. Böyle bir f_2 fonksiyonundan bir tane vardır. D_2 bölgesindeki f_2 fonksiyonunun D_3 bölgesinde analitik devamı olan f_3 fonksiyonu varsa ve $D_1 \cap D_3 \neq \emptyset$ ise $D_1 \cap D_3$ bölgesindeki her z için $f_3(z) = f_1(z)$ şartı sağlanmayabilir. D_1 bölgesindeki f_1 fonksiyonunun D_2 bölgesine analitik olarak sürdürülmesiyle elde edilen f_2 fonksiyonu bir F fonksiyonu altında genelleştirilebilir:

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & eğer\ z \in D_1 \\ f_2(z), & eğer\ z \in D_2 \end{cases}.$$

Böyle bir $F(z)$ fonksiyonu $D_1 \cup D_2$ bölgesinde analitiktir. $F(z)$ fonksiyonu, f_1'in veya f_2'nin $D_1 \cup D_2$ bölgesinde analitik devamıdır denir (Brown ve Churcill, 2014).

Analitik devam ettirme yapabilmek için ilişkilendirme fonksiyonunun spektral gösterimde yazılması gerekir. Spektral gösterimde yazıldıktan sonra fazladan

polinomlar ortaya çıkar. Bu polinomlardan kurtulmak için Borel dönüşümü yapılır. Polinomların kaçıncı dereceden oldukları bilinmediği için sonsuz kere türev alınır.

İlişkilendirme fonksiyonunun fiziksel kısmı ile KRD kısmı elde edildikten sonra bu iki kısım eşitlenir:

$$\Pi^{Hadron}(q^2) = \Pi^{KRD}(q^2). \tag{3.12}$$

KRD kısmı yüksek boyutlu işlemcileri içerir ve bu işlemcilerden gelen katkılar hesaba katılmıştır. Hadronik kısmında ise akımın kuantum sayısına karşılık gelen ve ilgilenen hadron dışındaki hadronların da katkıları hesaba katılmış olunur. Bir diğer deyişle hadronik kısım negatif q^2 değerleri için yazılırken KRD kısmı pozitif q^2 değerleri için yazılır. Bu ayrı iki ifadeyi doğrudan eşitlemek tutarlı bir yaklaşım değildir. Analitik olarak devam ettirilen spektral gösterimle eşitlenebilir. Bu eşitleme yapıldığında bilinmeyen polinomlar ortaya çıkar. Bu polinomlardan kurtulmak için Borel dönüşümü uygulanır:

$$B_{M^2}\Pi(q^2) = \lim_{\substack{n,q^2\to\infty \\ \frac{q^2}{n}\to M^2}} \frac{(q^2)^{n+1}}{n!}\left(\frac{d}{dq^2}\right)^n \Pi(q^2). \tag{3.13}$$

Burada M^2 Borel kütlesidir. Borel dönüşümünün amacı q^2'ye göre yeteri kadar türev alarak fazladan gelen polinomlardan kurtulmaktır. q^2 değeri arttığında alınacak türev sayısı da artacaktır. $q^2 \to \infty$ limit durumunda sonsuz kere türev alarak sonsuzluktan ve süreklilikten gelen katkılar bastırılmış olur. Borel dönüşümü ile (3.8) nolu eşitlikte yer alan $kalan\ terimler$ kısmı sabitin türevi olarak geldiğinden sıfırlanır. Ayrıca ilişkilendirme fonksiyonun hadron kısmından, Π^{KRD}'den gelen yüksek boyutlu kondensatlar (yoğuşmalar) da sıfırlanır.

3.2.4. Toplam kuralı

İlişkilendirme fonksiyonuna Borel dönüşümü uygulandıktan sonra toplam kuralı

$$f_K^2 e^{-\frac{m^2}{M^2}} = \int_{s_{min}}^{s_0} ds\, e^{-\frac{s}{M^2}} \rho^{KRD}(s) \tag{3.14}$$

olarak elde edilir. Bu ifadenin M^2'ye göre türevi alınırsa

$$m^2 = \frac{\int_{s_{min}}^{s_0} ds\, e^{-\frac{s}{M^2}}\, s\, \rho^{KRD}(s)}{\int_{s_{min}}^{s_0} ds\, e^{-\frac{s}{M^2}} \rho^{KRD}(s)} \tag{3.15}$$

bulunur. Bu ise ilgilenen hadronun temel durumdaki kütlesidir.

3.2.5. KRDTK ile spektrum hesabı

Bu kısma kadar kapsamlı bir şekilde verilen KRDTK yöntemini kısaca özetleyelim. KRDTK yönteminden kütle spektrumu hesabı yapmak için

$$\Pi(q^2) = i \int d^4x\, e^{iqx}\, \langle 0|T(j(x)\bar{j}(0))|0\rangle \tag{3.16}$$

ilişkilendirme fonksiyonu dikkate alınır. Burada $j(x)$ kuark ve glüon alanlarından oluşan ve vakuma etki ettiğinde ilgilenilen hadronu yaratan işlemcidir. $q^2 > 0$ bölgesinde işlemcilerin arasına, birim işlemcinin hadron durumları üzerinden toplam ifadesi yerleştirilirse ilişkilendirme fonksiyonu

$$\Pi = \sum_h \langle 0|j|h(q)\rangle \frac{1}{q^2 - m_h^2} \langle h(q)|j^\dagger|0\rangle + \textit{çoklu hadron durumları} \tag{3.17}$$

şeklinde yazılabilir. $-q^2 \gg \Lambda_{KRD}^2$ durumunda ilişkilendirme fonksiyonuna katkının büyük çoğunluğu $x \cong 0$ bölgesinden gelecektir. Bu durumda iki işlemci çarpımı, işlemci çarpım açılımı (İÇA) yapılarak ifade edilebilir:

$$T(j(x)\bar{j}(0)) = \sum_d C_d(x) O_d. \tag{3.18}$$

Burada $C_d(x)$ pertürbasyon teorisi ile hesaplanabilen katsayılar ve O_d ise kütle boyutu d olan yerel işlemcilerdir. Çarpımın bu ifadesine Fourier dönüşümü uygulanırsa ilişkilendirme fonksiyonu

$$\Pi = \sum_{d} C_d^f(p) \frac{\langle O_d \rangle}{q^d}. \tag{3.19}$$

halini alır. Bu ifadede $\langle O_d \rangle$ ile $d = 0$ durumu hariç pertürbasyon teorisi ile hesaplanamayan vakum yoğuşmaları (kondensat) temsil edilir. Toplamdaki $d = 0$ terimi birim işlemciye karşılık gelir ve tedirgeme kuramı ile hesaplanabilir. Toplamdaki diğer katkılar boyutlarına göre şöyle yazılabilir: $\langle \bar{q}q \rangle$ $(d = 3)$, $m_q \langle \bar{q}q \rangle$ $(d = 4)$, $\langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle$ $(d = 4)$ ve $\langle \bar{q} g \sigma G q \rangle (d = 5)$. $d = 1$ ve $d = 2$ boyutlarına karşılık gelen işlemcinin olmaması sonsuz bir toplam olan (3.18) ifadesinin hızlı bir şekilde yakınsamasını sağlar.

Toplam kurallarını elde etmek için (3.17) ve (3.19) nolu ifadelerin eşitlenmesi gerekir. Fakat görüldüğü üzere bu ifadeler farklı q^2 bölgelerinde elde edilmişlerdir. Bu iki farklı ifadeyi eşitlemek için spektral gösterim kullanılabilir:

$$\Pi(q^2) = \int_0^\infty \frac{\rho(s)}{s - q^2} ds + q^2 \; cinsinden \; polinomlar. \tag{3.20}$$

Bu ifadede $\rho(s)$ spektral yoğunluk olarak adlandırılır ve (3.17) nolu denklem kullanılarak bulunabilir. Elde edilen bu ifade (3.20) nolu denkleme yerleştirilerek $q^2 < 0$ bölgesinde ilişkilendirme fonksiyonu için bir ifade elde edilir. (3.17) nolu denklemden elde edilen spektral yoğunluğa $\rho(s)^{phen}$ (fenomenolojik kısım), (3.19) nolu denklemden elde edilene spektral yoğunluğa da $\rho(s)^{KRD}$ (KRD kısmı) dersek

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{phen}(s)}{s - q^2} ds + \; polinomlar = \int_0^\infty \frac{\rho^{KRD}(s)}{s - q^2} ds + \; polinomlar \tag{3.21}$$

eşitliği yazılabilir. Bu ifadedeki polinomlardan kurtulabilmek için türev alınabilir. Fakat polinomların kaçıncı dereceden olduğu bilinmediği için ilke gereği sonsuz türev alınır. Bu türev alma işlemini içeren Borel dönüşümü yaparak eşitlikteki polinomları yok edebiliriz. Borel dönüşümü polinomlardan kurtulmamızı sağlarken

$$\frac{1}{s-q^2} \to e^{-\frac{s}{M^2}} \tag{3.22}$$

dönüşümü de yapar. Burada M^2 Borel parametresidir ve fiziksel bir parametre değildir. Borel dönüşümünden sonra (3.21) nolu ifade şu hali alır

$$\sum_h |\langle 0|j|h(q)\rangle|^2 e^{-\frac{m_h^2}{M^2}} + çoklu\ hadron\ durumları = \int_0^\infty \rho^{KRD}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}\, ds. \tag{3.23a}$$

Bu ifade hadronik özellikler ile KRD parametreleri arasındaki ilişkiyi verir ve ayrıca sonsuz tane parametre içerir. Eşitliğin sol tarafına bakılırsa $e^{-\frac{m_h^2}{M^2}}$ çarpanından dolayı ilişkilendirme fonksiyonuna katkı küçük kütlelere sahip hadronlardan gelecektir. Bu yaklaşımı daha iyi bir hale getirmek ve çoklu hadron durumlarını parametrize edebilmek için *kuark-hadron dulalitesi* denen bir yaklaşım kullanılır. Bu yaklaşıma göre $s > s_0$ için $\rho^{phen}(s) \cong \rho^{KRD}(s)$ olmalıdır. $s > s_0$ için $\rho^{phen}(s)$ daha ağır durumların ve çoklu hadron durumlarının katkılarını içerir. Bu yaklaşım altında (3.23a) nolu denklem şu halde yazılabilir:

$$|\langle 0|j|h_l(q)\rangle|^2 e^{-\frac{m_h^2}{M^2}} = \int_0^{s_0} \rho^{KRD}(s) e^{-\frac{s}{M^2}}\, ds. \tag{3.23b}$$

Buradaki h_l, j işlemcisi tarafından yaratılan en düşük kütleli hadrondur. Bu ifadeden hareketle toplam kuralları elde edilebilir ve spektrum analizi yapılabilir.

3.3. Harmonik Salınıcı için SVZ Toplam Kuralları

Harmonik salınıcı, kuantum mekaniğinde analitik olarak çözülebilen bir sistem olduğundan önemli bir yere sahiptir. Bununla birlikte harmonik salınıcının özdeğer denklemi tam olarak çözülebildiğinden bir çok modele de temel oluşturur. Örneğin katılarda ses dalgalarının yayılması ve bir kovuk içindeki elektromanyetik dalganın ışıması özünde bir kuantum harmonik salınıcı özdeğer problemidir. Fizikte karşılaşılan ve çözümü zor olan veya yaklaşık olarak çözülebilen problemlerin modellenmesinde de harmonik salınıcı analojisi kurularak çözüm aranır.

Harmonik salınıcı için Hamiltonyen

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{mw^2}{2}\hat{x}^2 \tag{3.24}$$

şeklinde yazılır. Burada m kütle ve w ise frekanstır. Bu Hamiltonyen Schrödinger denkleminde $H\psi = E\psi$ yerine yazılarak çözülür. Çözüm için standart diferansiyel denklem çözme teknikleri kullanılacağı gibi cebirsel yöntem de kullanılabilir. Cebirsel yöntem merdiven işlemcileri diye tabir ettiğimiz alçaltma ve yükseltme işlemcilerini içerdiğinden bu yöntemi kullanmak daha cazip bulunabilir. Aşağıdaki inceleme Cohen vd. (1995) tarafından yapılmıştır.

SVZ toplam kuralları açısından harmonik salınıcı KRD'nin sahip olduğu iki ayırt edici özeliği andıran özelliklere sahiptir: hapsolma ve asimptotik özgürlük. Potansiyel enerjinin $x \to \infty$ limitinde sonsuz olması sadece bağlı durumların oluşmasına sebep olur sürekli durumlar oluşmaz. Bu durum hapsolma analojisidir. Potansiyel enerji $x \to 0$ limitinde herhangi bir tekilliğe sahip olmadığı için küçük mesafelerde kinetik enerji potansiyel enerjiye baskın olur. Bu ise asimptotik özgürlük analojisidir.

Schrödinger denklemi çözüldüğünde bağlı durumların $\psi_n(x)$ dalga fonksiyonları ve E_n enerji özdeğerleri bulunmuş olur. Bu ise sistem hakkındaki tüm bilgiye sahip olduğumuz anlamına gelir çünkü n'nin her değeri için dalga fonksiyonu ve enerji özdeğeri bulunabilir. SVZ toplam kurallarıyla sadece taban durumunun dalga fonksiyonu ve enerji özdeğeri bulunabilir. Harmonik salınıcının uyarılmış durumlarıyla ilgili bilgiye SVZ toplam kuralları çerçevesinde erişilmesi bazı özel şartları gerektirebilir.

Bu kısımdaki amaç üç boyutlu harmonik salınıcının orijindeki taban durumu dalga fonksiyonunu $|\psi_0(0)|^2 = \left(\frac{mw}{\pi}\right)^{3/2}$ ve enerjisini $E_0 = \frac{3}{2}w$ elde etmektir. Genel olarak $|\psi_n(0)|^2$ ve E_n şu şekilde verilir:

$$|\psi_n(0)|^2 = \frac{(2n+1)!!}{2^n n!}\left(\frac{mw}{\pi}\right)^{3/2}, E_n = \left(\frac{3}{2} + n\right)w. \tag{3.25}$$

Üç boyutlu harmonik salınıcı problemini SVZ toplam kuralları ile incelemek için önce koordinat uzayında Green fonksiyonu yazılır (Pascual ve Tarrach, 1984):

$$G(x,y;z) = \left\langle x \middle| \frac{1}{z-H} \middle| y \right\rangle = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(y)}{z-E_n}. \tag{3.26}$$

Kompleks z düzleminde $z = E_n$ durumunda tekillikler vardır ve Green fonksiyonu $z = -E < 0$ (uzaysı) bölgesinde tekilliklerden arındırılarak hesaplanır.

KRD ilişkilendirme fonksiyonuna benzeyen harmonik salınıcı ilişkilendirme fonksiyonu $x = y = 0$ alınarak

$$M_1(E) = -\,G(x,y;-E)|_{x=y=0} = \sum_n \frac{|\psi_n(0)|^2}{E+E_n} \tag{3.27}$$

şeklinde bulunur. Bu toplam yakınsak değildir (çıkarma terimlerinin gereksinimi) dolayısıyla türevine bakılır:

$$M_2(E) = \frac{d}{dE}\;G(x,y;-E)|_{x=y=0} = \sum_n \frac{|\psi_n(0)|^2}{(E+E_n)^2}. \tag{3.28}$$

Bu ifade durumlar üzerinden toplam alarak toplam kuralının bir tarafını verir.

Diğer tarafı hesaplamak için Green fonksiyonunun Born serisi oluşturulur ve tedirgeme kuramı kullanılır. Genel bir merkezcil $V(r)$ potansiyeli için birinci mertebeden sonuç (Cohen vd, 1995)

$$M_2(E) = \left(\frac{m^3}{8\pi^2 E}\right)^{1/2}\left[1 - 4m\int_0^\infty dr\; r\; e^{-\sqrt{8mEr}}V(r) + \cdots\right] \tag{3.29}$$

şeklindedir. Harmonik salınıcı için bu ifade

$$M_2(E) = \left(\frac{m^3}{8\pi^2 E}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{3}{16}\frac{w^2}{E^2} + \cdots\right] \tag{3.30}$$

halini alır. Bu açılımda E'nin büyük değerleri için ilk terim baskın hale gelir ve potansiyelden gelen katkı kontrollü bir düzeltme olur. $M_2(E)$'nin bu iki tarafı yani (3.30) nolu ifade ile (3.28) nolu ifadenin eşitlenmesi bize toplam kuralını verir. İlk iki terim alınarak eşitlenebilir:

$$\frac{\left(\frac{mw}{\pi}\right)^{3/2}}{\left(E+\frac{3}{2}w\right)^2} + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{mw}{\pi}\right)^{3/2}}{\left(E+\frac{5}{2}w\right)^2} + \cdots = \left(\frac{m^3}{8\pi^2 E}\right)^{1/2} - \frac{3}{16}\frac{w^2}{E^2}\left(\frac{m^3}{8\pi^2 E}\right)^{1/2} + \cdots \tag{3.31}$$

Bu ifade E'ye göre çözüldüğünde ve $E \cong w$ alındığında taban durumu için iyi bir yaklaşıklıkla doğru enerji değerini vermektedir. Bununla birlikte yine aynı değer için (3.28) eşitliğinde taban durumun katkısı toplamın % 33'ü kadar olup ilk sekiz terimin toplamında ise % 75'tir. Bu durumda elde edilen toplam kuralı kullanışsızdır çünkü amacımız taban durumunun baskın olduğu toplam kuralını elde etmektir. Bunun için üstel bir ağırlık fonksiyonu gibi daha iyi bir ağırlık fonksiyonu kullanarak toplam kuralını iyileştirmek gerekir. Böyle bir toplam kuralına Borel dönüşümüyle ulaşılabilir.

Her iki $M_2(E)$ ifadesine $q^2 \to E$ ve $M^2 \to \epsilon$ alarak E'ye göre Borel dönüşümü

$$\hat{f}(M^2) \equiv \lim_{\substack{q^2, n\to\infty \\ \frac{q^2}{n}=M^2}} \frac{(q^2)^{n+1}}{n!}\left(\frac{d}{dq^2}\right)^n f(q^2) \tag{3.32}$$

uygulandığında

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n(0)|^2\, e^{-\frac{E_n}{\epsilon}} &= \left(\frac{m\epsilon}{2\pi}\right)^{3/2}\left[1 - 4m\int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-\sqrt{8mEr}} V(r) + \cdots\right] \\ &= \left(\frac{m\epsilon}{2\pi}\right)^{3/2}\left(1 - \frac{w^2}{4\epsilon^2} + \cdots\right)\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir (Pascual ve Tarrach, 1984). Büyük ϵ değerleri için çok fazla sayıda düzey toplama katkı yaparken küçük ϵ değerlerinde en düşük düzey baskın hale gelecektir. $E \cong w$ alındığında taban seviyesinin toplam kuralına katkısı % 80 iken ilk iki düzeyin toplam kuralına katkısı % 97 civarındadır. Dolayısıyla taban durumu katkısı baskın hale geldiğinden bu son eşitlik kabul edilebilir bir toplam kuralıdır.

Amacımız taban durumu enerji düzeyini belirlemek olduğundan (3.23) nolu eşitliğe benzer bir eşitlik elde etmemiz gerekir. Bu aşamada spektral yoğunluklarla devam etmek yararlı olacaktır. Harmonik salınıcının spektral yoğunluğu enerji özfonksiyonları üzerinden toplam ile

$$\rho^{salınıcı}(E) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n(0)|^2 \delta(E - E_n) \tag{3.34}$$

şeklinde verilir. (3.33) ifadesinin sol tarafı spektral yoğunluğu kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n(0)|^2 \, e^{-\frac{E_n}{\epsilon}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \; e^{-\frac{E}{\epsilon}} \; \rho^{salınıcı}(E) \tag{3.35}$$

ifadesi elde edilir. Serbest parçacık Hamiltonyeni için spektral yoğunluk, V hacim olmak üzere

$$\rho^{serbest}(E) = \pi \sum_{k} \frac{1}{V} \delta(E - \frac{k^2}{2m}) \rightarrow \left(\frac{m^3}{2\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} E^{\frac{1}{2}} \theta(\mathrm{E}) \tag{3.36}$$

halini alır. Eğer bu spektral yoğunlukları enerjide yayarsak (smear) salınıcı ve serbest spektral yoğunluklar benzer terimleri içerir. (3.33) ifadesinin spektral yoğunluklar üzerinden integrali alınır ve serbest katkı sol tarafa aktarılırsa

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dE [\rho^{salınıcı}(E) - \rho^{serbest}(E)] \, e^{-\frac{E}{\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\epsilon^{2n}} \tag{3.37}$$

eşitliği elde edilir. Sağ taraftaki terimler büyük ϵ değerleri için bastırılır ve kuvvet düzeltmeleri adıyla bilinir. $\epsilon \rightarrow \infty$ limitinde sağ taraf sıfıra yaklaşır ve (3.37) nolu eşitlik

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dE [\rho^{salınıcı}(E) - \rho^{serbest}(E)] = 0 \tag{3.38}$$

halini alır ki buna global dualite denir. Eğer integral değerleri küçültülürse, örneğin birinci ve ikinci düzeylerin orta noktasını alınırsa

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{5w/2} dE \rho^{salınıcı}(E) \cong \frac{1}{\pi} \int_{0}^{5w/2} dE \rho^{serbest}(E) \cong \left(\frac{mw}{\pi}\right)^{3/2} \tag{3.39}$$

elde edilir. Benzer sonuçlar integrand E faktörünü içermek üzere diğer düzeyler için de elde edilebilir. Bu ilişkiye taban ve serbest durumlar arasındaki yerel dualite denir. Her bağlı durum kendi spektral yoğunluğunun serbest kısmını bünyesine katarak integralin büyüklüğünü değişmeden bırakır.

Toplam kurallarının temeli bu dualiteden faydalanmaktır. En düşük seviyeli durumun katkısını belirlemek için spektral fonksiyonu ve yüksek seviyeli durumların katkısı dualiteyle yaklaşık olarak elde edilebilir. Daha sonra belirlenecek bir parametre olan s_0 eşik değerinde $\rho^{serbest}$ ile başlayarak

$$|\psi_n(0)|^2\, e^{-\frac{E_n}{\epsilon}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{s_0} dE\rho^{serbest}(E)e^{-\frac{E_0}{\epsilon}} + \left(\frac{m\epsilon}{2\pi}\right)^{3/2}\left(-\frac{w^2}{4\epsilon^2} + \frac{19}{480}\frac{w^4}{4\epsilon^4} + \cdots\right) \quad \textbf{(3.40)}$$

eşitliği elde edilir.

Toplam kurallarından elde edilebilecek parametreler E_0, $|\psi_n(0)|^2$ ve s_0'dır. Toplam kurallarında yer alan ϵ parametresi yardımcı bir parametredir. Toplam kuralları kesin bir doğrulukla elde edilebilseydi ϵ için herhangi bir değer alınabilirdi. Fakat (3.40) nolu eşitlikten de görüleceği üzere toplam kuralları bir yaklaşıklıkla elde edilebilir. Dolayısıyla yapılabilecek en iyi şey eşitlikteki her iki tarafın da en iyi sonucu vereceği bir ϵ bölgesi belirlemektir. Böyle bir bölge, referans bölge de denir, yüksek seviyeli durumlardan ve yüksek mertebeli kuvvet düzeltmelerinden kaynaklı hataların her ikisi için de küçük olduğu durumda elde edilebilir.

Parametreleri elde etmenin bir çok yolu vardır. Eğer iki toplam kuralına sahipsek dalga fonksiyonuna bağımlılıktan kurtulmak için oranlama yöntemi kullanılır. Elde edilen toplam kuralının $-1/\epsilon$'ye göre türevi alınırsa diğer toplam kuralı elde edilir. Bu iki toplam kuralı bölündüğünde E_0 için bir tahmin yapılabilir:

$$E_0 = \frac{\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0} dE\ \rho^{serbest}(E)Ee^{-E/\epsilon} + \left(\frac{m\epsilon}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\epsilon\left(\frac{3}{2} + \frac{w^2}{8\epsilon^2} - \frac{19}{192}\frac{w^4}{\epsilon^4} + \cdots\right)}{\frac{1}{\pi}\int_0^{s_0} dE\ \rho^{serbest}(E)e^{-E/\epsilon} + \left(\frac{m\epsilon}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{w^2}{8\epsilon^2} + \frac{19}{480}\frac{w^4}{\epsilon^4} + \cdots\right)}. \quad \textbf{(3.41)}$$

s_0'ın değişen değerleri için bu ifadenin grafiği çizilebilir ve referans bölgede en çizgisel eğriyi seçerek $\left(0.6 < \frac{w}{\epsilon} < 1.2\right)$ E_0'ın değeri belirlenebilir. $s_0 \cong (5/2)w$ değerinde iki ya da üç terimle gerçek değer olan $E_0 = (3/2)w$'ya yakın bir değer bulunabilir. Bundan sonra toplam kurallarına geri dönülerek $|\psi_n(0)|^2$ bulunabilir. Detaylı bir tartışma için Pascual veTarrach (1984) çalışmasına bakılabilir.

3.3.1. Bir boyutlu harmonik salınıcı için SVZ toplam kuralları

Bu bölümde bir boyuttaki elektrik alanda yer alan harmonik salınıcının taban durumu enerji değeri elde edilmiştir. Bu inceleme Novak ve Olejnik (1985) tarafından yapılan çalışmanın Mutuk ve Gümüş (2016) tarafından tekrar incelenmesiyle yapılmıştır. İlk adım olarak Green fonksiyonunu yazmak gerekir. Bu fonksiyon, KRDTK yöntemindeki ilişkilendirme fonksiyonuna benzerdir.

Öklidyen Green fonksiyonu τ zaman parametresi olmak üzere

$$M(\tau) = G(\mathbf{0}, -i\tau; \mathbf{0}, 0) \quad \textbf{(3.42)}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$G(\boldsymbol{x_2}, t_2; \boldsymbol{x_1}, t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(\boldsymbol{x_2})\, \psi_k^*(\boldsymbol{x_1}) e^{-iE_k(t_2-t_1)} \tag{3.43}$$

ifadesi zamana bağlı Schrödinger denkleminin Green fonksiyonudur. Öklidyen Green fonksiyonu için toplam kuralı

$$M(\tau) \equiv |\psi_0(\mathbf{0})|^2 e^{-E_0\tau} + M_c(\tau) \tag{3.44}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $M_c(\tau)$, taban durumunun üzerinde yer alan durumların oluşturduğu süreklilik katkılarını temsil eder ve

$$M_c(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k(\mathbf{0})|^2 e^{-E_k\tau} \tag{3.45}$$

ile verilir. (3.44) nolu eşitliğin sol ve sağ tarafı belirli kabuller altında yaklaşık olarak eşit olur. Bunlardan birincisi $\tau < \tau_B$ gibi küçük Öklidyen zamanı için $M(\tau)$'nun Born serisindeki ilk birkaç terimi içeren $M_{pert}(\tau)$ pertürbatif açılımının varlığıdır. İkincisi ise $\tau > \tau_C$ gibi büyük Öklidyen zamanı için $M(\tau)$'ya taban seviyesi katkısının baskın olmasıdır. $\tau_C < \tau < \tau_B$ aralığındaki bir τ için taban durumu enerjisi

$$E_0 = -\frac{d}{d\tau} \ln\Big(M_{pert}(\tau) - M_c(\tau)\Big) \tag{3.46}$$

formülü ile verilir.

Bir boyutta elektrik alanda yer alan harmonik salınıcı için Hamiltonyen

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - e\mathrm{E}' x \tag{3.47}$$

şeklinde verilir. Buradaki E' elektrik alandır ve enerji özdeğeri kısaltmasıyla karıştırılmaması için bu şekilde seçilmiştir. enerji özdeğerleri

$$E_k = \left(k + \frac{1}{2} - \varepsilon\right)\omega; \;\; \varepsilon \equiv \frac{(eE')^2}{2mw^3} \tag{3.48}$$

iken enerji özfonksiyonları

$$\psi_k(x) = \phi_k(x - x_0); \; x_0 = \frac{eE'}{m\omega^2} \tag{3.49}$$

ile belirlenir. Son ifadedeki ϕ_k elektrik alansız bir boyutlu harmonik salınıcının özfonksiyonudur. Bu örnekteki Öklidyen Green fonksiyonu

$$M(\tau) = e^{\varepsilon\omega\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(-x_0)\phi_k^*(-x_0)e^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)\omega\tau} \quad \textbf{(3.50)}$$

şeklinde yazılır. Hamiltonyenin $H = T + V$ formunda olduğu hatırlanırsa elektrik alandaki potansiyelin

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - e\mathrm{E}'x \quad \textbf{(3.51)}$$

olduğu kolayca görülür. Bu potansiyel için Born serisi, $M_0(\tau) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\tau}}$ serbest parçacığın Öklidyen Green fonksiyonu olmak üzere (Novak ve Olejnik, 1985)

$$M_{pert}(\tau) = M_0(\tau)\left(1 - \frac{(\omega\tau)^2}{12} + \varepsilon\frac{(\omega\tau)^3}{12} + \frac{(\omega\tau)^4}{160} + \cdots.\right) \quad \textbf{(3.52)}$$

ifadesi ile verilir. Elektrik alan dahilindeki en düşük seviyedeki katkı serinin üçüncü terimi ile belirlenir:

$$M_{pert}(\tau) \cong M_0(\tau)\varepsilon\frac{(\omega\tau)^3}{12}. \quad \textbf{(3.53)}$$

Bu son ifade ile 3.46 nolu denklemin sağındaki ilk terim elde edilmiştir. Diğer terimi elde etmek için serbest hareket yaklaşımı kullanılır. Bunun için ilk önce $\rho_0(E) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2E}}$ olmak üzere

$$M_0(\tau) = \int_0^{\infty} dE\rho_0(E)e^{-E\tau} \quad \textbf{(3.54)}$$

ifadesi yazılır. Bu yaklaşım altında süreklilik katkısı

$$M_c(\tau) = \int_{E_c}^{\infty} dE\rho_0(E)e^{-E\tau} \quad \textbf{(3.55)}$$

eşitliğiyle belirlenebilir. İntegralin alt sınırı olan E_c taban durumu parametreleriyle belirlenir (Novak ve Olejnik, 1985). Çok zayıf elektrik alandaki taban durumu enerjisi için 3.46 nolu denklem kullanılabilir. Normal değerdeki elektrik alan için

$$\Delta E_0 = -\frac{d}{d\tau}\ln\left(1 + \frac{\Delta M_{pert}(\tau) - \Delta M_c(\tau)}{|\psi_0(\mathbf{0})|^2 e^{-E_0\tau}}\right) \quad \textbf{(3.56)}$$

formülü kullanılabilir. Bu son ifadede $\Delta M_{pert}(\tau) = M'_{pert}(\tau) - M_{pert}(\tau)$ ve $\Delta M_c(\tau) = M'_c(\tau) - M_c(\tau)$ ile temsil edilir. Üslü ifade elektrik alandaki, üssüz ifade

ise elektrik alansız ifadeleri gösterir. Çizelge 3.3, (3.46) nolu deklem kullanılarak ve Çizelge 3.4, (3.56) nolu denklem kullanılarak elde edilen taban durumu enerji seviyelerini göstermektedir.

Çizelge 3.3. Denklem (3.46) kullanılarak elde edilen elektrik alandaki taban durumu enerji seviyeleri (w biriminde)

$\varepsilon \equiv \frac{(eE')^2}{2mw^3}$	E_c	E_0	ΔE_0	ΔE_0 $(gerçek\ değer)$
0.	0.90	0.397	0.	0.
0.01	0.81	0.387	-0.01	-0.01
0.02	0.72	0.375	-0.022	-0.02
0.03	0.63	0.364	-0.033	-0.03

Çizelge 3.4. Denklem (3.56) kullanılarak elde edilen elektrik alandaki taban durumu enerji seviyeleri (w biriminde)

$\varepsilon \equiv \frac{(eE')^2}{2mw^3}$	E_c	ΔE_0	ΔE_0 $(gerçek\ değer)$
0.01	1.43	-0.011	-0.01
0.02	1.36	-0.021	-0.02
0.03	1.29	-0.035	-0.03
0.04	1.22	-0.047	-0.04
0.05	1.15	-0.058	-0.05

Harmonik salınıcının taban durumu enerji seviyesi $E_0 = 0.5$ (w biriminde) iken SVZ toplam kurallarıyla elde edilen değer $E_0 = 0.397$'dir. Sıfırdan farklı bir elektrik alandaki taban durumu enerji seviyesindeki kayma $\Delta E_0 = E_0(\varepsilon) - E_0(0)$ formülü ile hesaplanır. $E_0(\varepsilon)$, elektrik alandaki taban durumu enerjisidir.

3.4. B Mezonu Kütlesi İçin SVZ Toplam Kuralları

Harmonik salınıcı örneğinden sonra bu bölümde SVZ Toplam Kurallarının ayrıntılı bir örneği gösterilecektir. Bu yöntem yardımıyla B mezonunun kütlesi bulunacaktır. B mezonunun içeriğinde $q\bar{b}$ kuarkları bulunur. Vakumdan B mezonu oluşturabilecek akım

$$j(x) = -i\overline{b_a}(x)\gamma_5 q_a(x) \tag{3.57}$$

şeklinde seçilebilir. Burada a renk indisidir. γ_5 matrisi $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ şeklinde tanımlı olup akımın sanki-skaler olduğuna dikkat edilmelidir. Bu akımı

$$\Pi(q^2) = i\int d^4x\, e^{ipx}\langle 0|T\{j(x)j^\dagger(0)\}|0\rangle \tag{3.58}$$

ilişkilendirme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\Pi = i\int d^4x\, e^{ipx}\langle 0|T\{(-i\overline{b_a}(x)\gamma_5 q_a(x))(i\overline{q_b}(0)\gamma_5 b_b(0)\}|0\rangle \tag{3.59}$$

ifadesi elde edilir. Burada a ve b indislerinin renk indisleridir. Zaman sıralı çarpım T'yi süslü parantez içerisine etki ettirilirse dört tane olası durum vardır:

$$\Pi_1 = i\int d^4x\, e^{ipx}\langle 0|:\overline{b_a}(x)\gamma_5 q_a(x)\overline{q_b}(0)\gamma_5 b_b(0):|0\rangle \tag{3.60}$$

$$\Pi_2 = i\int d^4x\, e^{ipx}\langle 0|:\overline{b_a}(x)\gamma_5 q_a(x)\overline{q_b}(0)\gamma_5 b_b(0):|0\rangle \tag{3.61}$$

$$\Pi_3 = i\int d^4x\, e^{ipx}\langle 0|:\overline{b_a}(x)\gamma_5 q_a(x)\overline{q_b}(0)\gamma_5 b_b(0):|0\rangle \tag{3.62}$$

$$\Pi_4 = i\int d^4x\, e^{ipx}\langle 0|:\overline{b_a}(x)\gamma_5 q_a(x)\overline{q_b}(0)\gamma_5 b_b(0):|0\rangle. \tag{3.63}$$

Bu ilişkilendirme fonksiyonlarında yer alan ⌐¬ çizgisi ile ilgili kuarkların kaynaştığı (contraction) temsil edilir. Ayrıca ∷ notasyonu KAT'ta normal sıralama (normal ordering) olarak tanımlanan bir olgudur ve yaratma işlemcilerinin, yok etme işlemcilerinden önce geldiğini belirtir. (3.60) ve (3.63) nolu ilişkilendirme fonksiyonuna bakıldığında b kuarkının yaratma ve yoketme işlemcilerinin normal çarpımını içerir ve bunlar kaynaşmamıştır. Bu işlemciler vakumdaki eğer varsa b kuarklarını ve b karşıt kuarklarını yaratıp yokedecektir. b kuark ağır olduğundan

vakumda kendiliğinden bulunması beklenmez. Dolayısıyla bu ilişkilendirme fonksiyonlarının sonucumuza bir katkısı yoktur.

3.4.1. Π_2'nin hesabı

3.61 nolu ilişkilendirme fonksiyonunu indis kullanarak matris elemanı şeklinde yazılırsa

$$\Pi_2 = -i\int d^4x\, e^{ipx}\left\langle 0\middle|:(\overline{b_a}(x))_\alpha(\gamma_5)_{\alpha\beta}\left(q_b(x)\right)_\beta(\overline{q_b}(x))_\sigma\,(\gamma_5)_{\sigma\theta}(b_b(0))_\theta:\middle|0\right\rangle \qquad \textbf{(3.64)}$$

eşitliği elde edilir. Gama matrisleri vakum beklenen değer matris elemanından dışarı çıkarılabilir:

$$\Pi_2 = -i\int d^4x\, e^{ipx}(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_5)_{\sigma\theta}\left\langle 0\middle|T\{(b_b(0))_\theta\left(\overline{b_a}(x)\right)_\alpha\}\middle|0\right\rangle\left\langle 0\middle|T\{(q_a(x))_\beta(\overline{q_b}(0))_\sigma\}\middle|0\right\rangle. \qquad \textbf{(3.65)}$$

$\langle 0|\cdots|0\rangle$ beklenen değer elemanı ilerletici (propagatör) cinsinden şöyle yazılabilir:

$$\delta^{ab}S^{(q)}(x-0)_{\beta\sigma} = \left\langle 0\middle|T\{\left(q_a(x)\right)_\beta\left(\overline{q_b}(0)\right)_\sigma\}\middle|0\right\rangle. \qquad \textbf{(3.66)}$$

Buradan ve $\delta^{ab}\delta^{ba} = 3$ olmasından hareketle ilişkilendirme fonksiyonu şu hali alır:

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= -i\int d^4x\, e^{ipx}(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_5)_{\sigma\theta}\,\delta^{ba}S^{(b)}(-x)_{\theta\alpha}\delta^{ab}S^{(q)}(x)_{\beta\sigma}\\ &= -3i\int d^4x\, e^{ipx}\{(\gamma_5)_{\sigma\theta}S^{(b)}(-x)_{\theta\alpha}(\gamma_5)_{\alpha\beta}S^{(b)}S^{(q)}(x)_{\beta\sigma}\} \qquad \textbf{(3.67)}\\ &= -3i\int d^4x\, e^{ipx}\,\text{İz}\left[\gamma_5 S^{(b)}(-x)\gamma_5 S^{(q)}(x)\right].\end{aligned}$$

Son eşitlik matrisin izini alan bir ifadedir. İlerletici açık halinde

$$S^q(x) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{-ikx}i\frac{\not{k}+m_q}{k^2-m_q^2} \qquad \textbf{(3.68)}$$

yazılıp ilişkilendirme fonksiyonunun içerisine yerleştirilirse

$$\begin{aligned}\Pi_2 &= -3i\int d^4x\, e^{ipx}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}e^{ik_1x}\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}e^{-ik_2x}\frac{\text{İz}[\gamma_5(\not{k}_1+m_b)\gamma_5(\not{k}_2+m_q)]}{(k_1^2-m_b^2)(k_2^2-m_q^2)}\\ &= -3i\int d^4x\, e^{i(p+k_1-k_2)x}\int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\text{İz}[\gamma_5(\not{k}_1+m_b)\gamma_5(\not{k}_2+m_q]}{(k_1^2-m_b^2)(k_2^2-m_q^2)}\end{aligned} \qquad \textbf{(3.69)}$$

bulunur. Önce x integrali

$$\int d^4x \; e^{i(p+k_1-k_2)x} = (2\pi)^4 \delta^4(p + k_1 - k_2) \tag{3.70}$$

yardımıyla alınırsa Π_2 ilişkilendirme fonksiyonu

$$\Pi_2 = 3i \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{\text{İz}[\gamma_5(\not{k}_1 + m_b)\gamma_5(\not{p} + \not{k}_1 + m_q)}{(k_1^2 - m_b^2)((p + k_1)^2 - m_q^2)} \tag{3.71}$$

halini alır. Eğer kolaylık olması açısından $k_1 \to k$ yazılıp İz hesaplanırsa

$$\Pi_2 = 3i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(4m_b m_q - 4k^2 - 4kp)}{(k^2 - m_b^2)((p + k)^2 - m_q^2)} \tag{3.72}$$

sonucu elde edilir. Bu integrali almak için önce jenerik bir integral tanımlanırsa işler kolaylaşır:

$$I_0 = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_b^2)((p + k)^2 - m_q^2)}. \tag{3.73}$$

Tanımlanan bu I_0 integraliyle (3.72) nolu ifade şu hali alır:

$$\Pi_2 = 3i\big(4m_b m_q I_0 - 4I(k^2) - 4I(kp)\big). \tag{3.74}$$

$I(k^2)$ ve $I(kp)$, I_0 integrandının k^2 ve kp ile çarpımının integralidir. (3.74) nolu ilişkilendirme fonksiyonunu hesaplamak için önce I_0'ı integralini hesaplamak yararlı olacaktır.

Bu tip integraller Kuantum Alan Teorilerinde sıkça karşılaşılır ve sonucu elde etmek için integral önce d boyutta tanımlanır ve ardından Feynman parametrizasyonu kullanılır. İntegral önce d boyuta taşınırsa

$$I_0 = \mu^{4-d} \int \frac{d^4d}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m_b^2)((p + k)^2 - m_q^2)} \tag{3.75}$$

elde edilir. Daha sonra

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{du}{(uA + (1 - u)B)^2} \tag{3.76}$$

Feynman parametrizasyonundan ve Wick dönüşümünden

$$\tilde{k}_0 = ik_0, \tilde{k}_i = k_i \tag{3.77}$$

yararlanılırsa I_0

$$I_0 = -i\mu^{4-d}\int_0^1 du \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)}\frac{1}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} \tag{3.78}$$

olarak bulunur. Burada $\Delta = -\mathrm{p}^2\, u(1-u) - m_b^2 u - m_q^2(1-u)$'dur. $d = 4 - 2\varepsilon$ olarak tanımlanırsa yukarıdaki integral

$$I_0 = \mu^{2\varepsilon}\int_0^1 du \frac{1}{(4\pi)^{2-\varepsilon}}\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2)}\frac{1}{\Delta^{\varepsilon}} \tag{3.79}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade yeniden düzenlenirse

$$I_0 = \frac{1}{2(4\pi)^2}\int_0^1 du \left(\frac{4\pi\mu^2}{\Delta}\right)^{\varepsilon}\ \Gamma(\varepsilon) \tag{3.80}$$

halini alır. $d \to 4$ durumunda ε sıfıra yakınsayacağından $\varepsilon \ll 1$ olur. $\alpha = \frac{4\pi\mu^2}{\Delta}$ kısaltmasında

$$\alpha^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon) = (1 + \varepsilon \ln\alpha + \cdots)\Gamma(\varepsilon) \tag{3.81}$$

halini alır. $\Gamma(\varepsilon)$ seriye açıp $O(\varepsilon^2)$'li terimler ihmal edilirse

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \frac{1}{2}(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6})\varepsilon \tag{3.82}$$

bulunur. Bu açılımla (3.81) nolu ifade çarpılırsa

$$\alpha^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma\right) - \ln\frac{\Delta}{\mu^2} \tag{3.83}$$

elde edilir. Bu ifadede parantez arasındaki terim sabittir çünkü momentum değişkeninden bağımsızdır. (3.83) nolu ifade ile I_0 integrali

$$I_0 = sabit - \frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 du\ \ln\frac{\left(-p^2 + \frac{m_b^2}{1-u} + \frac{m_q^2}{u}\right)}{\mu^2} \tag{3.84}$$

halini alır. Sabit terimler Borel dönüşümüyle sıfır olacaktır. $I(k^2)$ ve $I(kp)$ artık kolaylıkla hesaplanabilir:

$$I(k^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m_b^2)((p+k)^2 - m_q^2)}$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - m_b^2 + m_b^2}{(k^2 - m_b^2)((p+k)^2 - m_q^2)} \tag{3.85}$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p+k)^2 - m_q^2)} + m_b^2 I_0.$$

Bu integralde $k = q - p, (d^4k = d^4q)$ dönüşümü yapıldığında

$$I = \int d^4q \; \frac{1}{q^2 - m_b^2} + m_b^2 I_0 \tag{3.86}$$

elde edilir. İntegral p'den bağımsız olduğu için sabit bir değer olarak alınabilir:

$$I(k^2) = sabit + m_b^2 I_0. \tag{3.87}$$

Benzer şekilde $I(kp)$ integrali de

$$I(kp) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{kp}{(k^2 - m_b^2)((p+k)^2 - m_q^2)}$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \frac{(k+p)^2 - k^2 - p^2}{(k^2 - m_b^2)((p+k)^2 - m_q^2)}$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(k+p)^2}{(k^2 - m_b^2)((p+k)^2 - m_q^2)} - \frac{1}{2} I(k^2) - \frac{1}{2} p^2 I_0 \tag{3.88}$$
$$= sabit - \frac{1}{2}(m_b^2 + p^2) I_0$$

şeklinde bulunur. Son olarak ilişkilendirme fonksiyonu

$$\Pi_2 = sabit - \left(12 m_b m_q + 6 m_b^2 + 6 p^2\right) I_0 \tag{3.89}$$

ile yazılır.

3.4.2. Π_3'ün hesabı

(3.62) nolu ilişkilendirme fonksiyonunu

$$\Pi_3 = i \int d^4x \, e^{ipx} \langle 0 | : \overline{b_a}(x) \gamma_5 q_a(x) \overline{q_b}(0) \gamma_5 b_b(0) : | 0 \rangle \tag{3.90}$$

indis kullanarak matris elemanı şeklinde yazarsak

$$\Pi_3 = -i \int d^4x \, e^{ipx} \left\langle 0 \middle| : \left(\overline{b_a}(x)\right)_\alpha (\gamma_5)_{\alpha\beta} \left(q_a(x)\right)_\beta \left(\overline{q_b}(0)\right)_\sigma (\gamma_5)_{\sigma\theta} \left(b_b(0)\right)_\theta : \middle| 0 \right\rangle. \tag{3.91}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan hareketle

$$\Pi_3 = -i\int d^4x\, e^{ipx}(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_5)_{\sigma\theta}\left\langle 0\middle|T\{(b_b(0))_\theta\left(\overline{b_a}(x)\right)_\alpha\}\middle|0\right\rangle\left\langle 0\middle|:(q_a(x))_\beta(\overline{q_b}(0))_\sigma\middle|0\right\rangle \quad \textbf{(3.92)}$$

olarak bulunur. İlerletici

$$\delta^{ab}S^q_{\beta\sigma}(x-0) = \left\langle 0\middle|T\{(q_a(x))_\beta(\overline{q_b}(0))_\sigma\}\middle|0\right\rangle \quad \textbf{(3.93)}$$

şeklinde tanımlanıp ve Π_3'te yerine yazılırsa

$$\Pi_3 = -i\int d^4x\, e^{ipx}(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_5)_{\sigma\theta}\delta^{ab}S^{(b)}_{\theta\alpha}(-x)\left\langle 0\middle|:(q_a(x))_\beta(\overline{q_b}(0))_\sigma\middle|0\right\rangle \quad \textbf{(3.94)}$$

bulunur. Son matris elemanı, $A_{\beta\sigma} = \left\langle 0\middle|:\left(q_a(x)\right)_\beta\left(\overline{q_b}(0)\right)_\sigma\middle|0\right\rangle$ olarak tanımlanırsa ilişkilendime fonksiyonu

$$\Pi_3 = -i\int d^4x\, e^{ipx}\text{İz}[\gamma_5 A\gamma_5 S(-x)] \quad \textbf{(3.95)}$$

halini alır. Bütün $4x4$ matrisler $\Gamma_i = \left\{\hat{1}, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5, \frac{\sigma_{\mu\nu}}{\sqrt{2}}\right\}$ kümesindeki matrislerin lineer bileşimi şeklinde yazılabilir. Burada $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$'dür. $A_{\beta\sigma} = \left(\frac{1}{4}\text{İz}[A\Gamma_i]\right)(\Gamma_i)_{\beta\sigma}$ özdeşliğinden yararlanarak

$$\Pi_3 = -i\int d^4x\, e^{ipx}\,\text{İz}\left[\gamma_5\Gamma_i\gamma_5 S(-x)\right]\frac{1}{4}\,\langle 0|:q(x)_m\bar{q}(0)_n(\Gamma_i)_{nm}|0\rangle \quad \textbf{(3.96)}$$

şeklinde yazılabilir. Γ_i kümesinden ilişkilendirme fonksiyonuna sıfırdan farklı katkı sadece $\Gamma_i = \hat{1}$ ve $\Gamma_i = \gamma_\mu$'den gelir. 3.68 nolu ilerleticiyi yukarıdaki ifadede yerine yazılıp İz alınırsa

$$\Pi_3 = \int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{i(p+k)x}}{k^2-m_q^2}\left(\underbrace{-m_b\langle 0|:\bar{q}(0)q(x):|0\rangle}_{3A} + \underbrace{k_\mu\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(x):|0\rangle}_{3B}\right) \quad \textbf{(3.97)}$$

bulunur. $3A$ ve $3B$ ifadeleri ayrı ayrı ele alınabilir. Bunun için kuark alanı seriye açılır

$$q(x) = q(0) + x_\alpha\partial^\alpha q(0) + \frac{1}{2}x_\alpha x_\beta\partial^\alpha\partial^\beta q(0) + \cdots \quad \textbf{(3.98)}$$

ve

$$x_\alpha D^\alpha = x_\alpha(\partial^\alpha - ieA^\alpha) = x_\alpha \partial^\alpha - iex_\alpha A^\alpha \tag{3.99}$$

eşitliğinde

$$x_\alpha A^\alpha = 0 \tag{3.100}$$

Fock-Schwinger ayarı kullanılırsa Taylor serisi şu şekilde yazılabilir:

$$q(x) = q(0) + x_\alpha D^\alpha q(0) + \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta D^\alpha D^\beta q(0) + \cdots \tag{3.101}$$

Bu ayar, Taylor açılımının normal türev yerine kovaryant türev cinsinden yapabilmek için kullanılır.

<u>3*A*:</u> Vakum beklenen değerinde $q(x)$ kuark alanı seriye açılır ve $\bar{q}(0)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} &\langle 0|:\bar{q}(0)q(0):|0\rangle + x_\alpha \langle 0|:\bar{q}(0)D^\alpha q(0):|0\rangle \\ &\qquad + x_\alpha x_\beta \langle 0|:\bar{q}(0)D^\alpha D^\beta q(0):|0\rangle + \cdots \end{aligned} \tag{3.102}$$

elde edilir. Bu sonsuz seride ilk üç terimle ilgilenmek problemin doğası açısından yeterli olacaktır. Açılımdaki ilk terim $\langle 0|:\bar{q}(0)q(0):|0\rangle = \langle \bar{q}q\rangle$ kondensat tanımlaması olarak yapılır. İkinci terim sıfır olur, $\langle 0|:\bar{q}(0)D^\alpha q(0):|0\rangle = 0$ çünkü vakumda indis taşıyan böyle bir matris elemanı yazılamaz. Üçüncü terimde $\alpha \leftrightarrow \beta$ altında indislerin simetrik olması dikkate alınıp $x_\alpha x_\beta D^\alpha D^\beta = \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \{D^\alpha, D^\beta\}$ yazılırsa

$$x_\alpha x_\beta \langle 0|:\bar{q}(0)D^\alpha D^\beta q(0):|0\rangle = \frac{1}{2} x_\alpha x_\beta \langle 0|:\bar{q}(0)\{D^\alpha, D^\beta\}q(0):|0\rangle \tag{3.103}$$

şeklinde yazılabilir. Bu son ifadenin sağ tarafı iki indis taşıyan bir metriğe eşitlenebilir:

$$\frac{1}{2}\langle 0|:\bar{q}(0)\{D^\alpha, D^\beta\}q(0):|0\rangle \equiv C g^{\alpha\beta}. \tag{3.104}$$

Şimdiki problem C katsayısının ne olduğunu bulmaktır. Bunun için yukarıdaki ifade sağdan $g^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha)$ ile çarpılırsa

$$C = \frac{1}{4}\left\langle 0 \middle| : \bar{q}(0) \left(\underbrace{D^\alpha D^\beta + D^\beta D^\alpha}_{\alpha \leftrightarrow \beta \text{ altında simetrik}} \right) \frac{1}{2} \left(\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha \right) q(0) : \middle| 0 \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4} \langle 0 | : \bar{q}(0) D^\alpha D^\beta \left(\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha \right) q(0) : | 0 \rangle \tag{3.105}$$

$$= \frac{1}{4} \langle 0 | : \bar{q}(0) \left(\not{D} \not{D} + D^\alpha D^\beta \gamma^\beta \gamma^\alpha \right) q(0) : | 0 \rangle$$

olarak bulunur. $D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha + \left[D^\alpha, D^\beta \right]$ ve $\left[D^\alpha, D^\beta \right] = -igG^{\alpha\beta}$ olduğu dikkate alınırsa

$$C = \frac{1}{4} \langle 0 | : \bar{q}(0) \left(\not{D} \not{D} + \not{D} \not{D} - igG^{\alpha\beta} \gamma^\beta \gamma^\alpha \right) q(0) : | 0 \rangle$$

$$= -\frac{ig}{4} \left\langle 0 \middle| : \bar{q}(0) \underbrace{G^{\alpha\beta}}_{\text{ters simetrik}} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\left[\gamma^\beta, \gamma^\alpha \right]}_{\text{ters simetrik}} + \frac{1}{2} \underbrace{\left\{ \gamma^\beta, \gamma^\alpha \right\}}_{\text{simetrik}} \right) q(0) : \middle| 0 \right\rangle + O\left(m_q^2 \right) \tag{3.106}$$

elde edilir. Bu ifade elde edilirken Dirac denkleminden, $\not{D} q(0) = -im_q q(0)$ yararlanıldı. Simetrik bir matrisle ters simetrik bir matrisin çarpımı sıfırdır. Bu gerçek altında yukarıdaki ifade

$$C = \frac{1}{16} \langle 0 | : \bar{q}(0) g G^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} q(0) : | 0 \rangle \tag{3.107}$$

olarak bulunur. Burada $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \left[\gamma^\alpha, \gamma^\beta \right]$'dır. Bu ifade daha kısa bir notasyonla şöyle gösterilebilir:

$$C \equiv \frac{1}{16} \langle \bar{q} g G \sigma q \rangle. \tag{3.108}$$

$\langle 0 | : \bar{q}(0) q(0) : | 0 \rangle \equiv \langle \bar{q} q \rangle$ kondensat tanımlaması kullanılırsa $3A$ kısmından gelen katkı

$$\langle 0 | : \bar{q}(0) q(x) : | 0 \rangle \equiv \langle \bar{q} q \rangle + \frac{1}{16} x^2 \langle \bar{q} g G \sigma q \rangle \tag{3.109}$$

olarak bulunur.

$\underline{3B}$: Vakum beklenen değer, bir önceki kısma benzer olarak

$$\begin{aligned}
&\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(x):|0\rangle \\
&= \left\langle 0\middle|:\bar{q}(0)\gamma_\mu\left(q(0)+x_\alpha D^\alpha q(0)+\frac{1}{2}x_\alpha x_\beta D^\alpha D^\beta q(0)\right)q(0):\middle|0\right\rangle \\
&\quad = \langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(0):|0\rangle + x^\alpha\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu D_\alpha q(0):|0\rangle \\
&\qquad + \frac{1}{4}x^\alpha x^\beta\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu\{D_\alpha, D_\beta\}q(0):|0\rangle
\end{aligned} \tag{3.110}$$

elde edilir. $\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(0):|0\rangle = 0$ (vakumda indis taşıyan böyle bir dört vektör yazılamaz), D bir sabit olmak üzere $\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu D_\alpha q(0):|0\rangle \equiv D g_{\mu\alpha}$ ve yine benzer nedenden dolayı $\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu\{D_\alpha, D_\beta\}q(0):|0\rangle = 0$'dır. D katsayınının bulunması bir önceki kısma benzer şekilde yapılır:

$$D = \frac{1}{4}\langle 0|:\bar{q}(0)\,\not{D}\,q(0):|0\rangle. \tag{3.111}$$

Dirac denklemi $(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi(x) = 0$ şeklindedir. Buradan yola çıkarak D katsayısı

$$D = -i\frac{m_q}{4}\langle\bar{q}q\rangle \tag{3.112}$$

şeklinde bulunur. Sonuç olarak $3B$ kısmından gelen katkı

$$\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(x):|0\rangle = -i\frac{m_q}{4}x_\mu\langle\bar{q}q\rangle \tag{3.113}$$

olarak elde edilir.

$3A$ teriminden gelen $\langle\bar{q}gG\sigma q\rangle$ katkısı B mezonu kütlesi için ihmal edilebilir. Geriye kalan katkılar ilişkilendirme fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\Pi_3 &= \int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{i(p+k)x}}{k^2-m_q^2}\left(-m_b\langle 0|:\bar{q}(0)q(x):|0\rangle\right. \\
&\qquad \left. + k_\mu\langle 0|:\bar{q}(0)\gamma_\mu q(x):|0\rangle\right) \\
&= -\int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{i(p+k)x}}{k^2-m_b^2}m_b\langle\bar{q}q\rangle \\
&\qquad -\frac{im_q}{4}\int d^4x\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{i(p+k)x}}{k^2-m_b^2}k_\mu x_\mu\langle\bar{q}q\rangle
\end{aligned} \tag{3.114}$$

elde edilir. x integrali alınırsa

$$\Pi_3 = -\int d^4k \frac{\delta^4(p+k)}{k^2-m_b^2} m_b\langle\bar{q}q\rangle - \frac{im_q}{4}\int d^4k \frac{k_\mu x_\mu}{k^2-m_b^2}\,\delta^4(p+k)\langle\bar{q}q\rangle$$

$$= -\frac{m_b\langle\bar{q}q\rangle}{p^2-m_b^2} - i\frac{m_q}{4}x_\mu\langle\bar{q}q\rangle\left(-\frac{p_\mu}{p^2-m_b^2}\right)$$

$$= -\frac{m_b\langle\bar{q}q\rangle}{p^2-m_b^2} - i\frac{m_q}{4}\langle\bar{q}q\rangle\left(-i\frac{\partial}{\partial_\mu}\right)\left(-\frac{p_\mu}{p^2-m_b^2}\right) \tag{3.115}$$

$$= -\frac{m_b\langle\bar{q}q\rangle}{p^2-m_b^2} + \frac{m_q}{4}\langle\bar{q}q\rangle\left(\frac{1}{p^2-m_q^2} + \frac{2p^2}{(p^2-m_b^2)^2}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç olarak toplam ilişkilendirme fonksiyonu

$$\Pi = \Pi_2 + \Pi_3$$

$$\Pi = sabit - \left(12m_bm_q + 6m_b^2 + 6p^2\right)I_0 - \frac{m_b\langle\bar{q}q\rangle}{p^2-m_b^2} + \frac{m_q}{4}\langle\bar{q}q\rangle\left(\frac{1}{p^2-m_b^2} + \frac{2p^2}{(p^2-m_b^2)^2}\right) \tag{3.116}$$

olarak bulunur. Hesaplanan ilişkilendirme fonksiyonu KRD ya da teorik kısım olarak isimlendirilen kısımdır. Bir sonraki bölümde ilişkilendirme fonksiyonunun hadron ya da fenomenolojik kısmı olarak adlandırılan tarafı elde edilecektir.

3.4.3. Fenomenolojik (hadron) taraf hesabı

Bu bölümde ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik kısmı elde edilecektir. Bunun için ilişkilendirme fonksiyonunun spektral gösterimde yazılması gerekir. Toplam kurallarından elde edilen aslında kütlenin karesidir. Bununla birlikte f_B^2 bir sabit olmak üzere

$$\frac{f_B^2}{p^2-m_B^2} = \int_0^{s_0}\frac{\rho(s)}{s-p^2} + p^2\ cinsinden\ polinomlar \tag{3.117}$$

spektral gösterimi oluşturulsun. Burada m_B, B mezonunun kütlesidir. s_0 için ayrı bir parantez açmak gerekir. İlişkilendirme fonksiyonuna seçtiğimiz akımla aynı kuantum sayılarına sahip bütün hadronlar katkı verecektir. KRDTK çerçevesinde sadece en düşük kütleli hadron hassas bir şekilde hesaplanabilir. Bu yüzden yüksek kütleli hadronların katkıları bir şekilde kesilmesi gerekir. Dolayısıyla integralin üst sınırını s_0 olarak sınırlandırılır. Değer olarak da incelenen hadronun kütlesinden yaklaşık 0.5 GeV yukarıda seçilir.

B mezonu için ilişkilendirme fonksiyonunun KRD kısmı olarak da bilinen hadron kısmı

$$\Pi^{KRD} = sabit - \left(12m_b m_q + 6m_b^2 + 6p^2\right)I_0 - \frac{m_b\langle\bar{q}q\rangle}{p^2 - m_b^2} + \frac{m_q}{4}\langle\bar{q}q\rangle\left(\frac{1}{p^2 - m_b^2} + \frac{2p^2}{(p^2 - m_b^2)^2}\right) \quad \textbf{(3.118)}$$

$$= \frac{f_B^2}{p^2 - m_b^2} + yüksek\ seviyeli\ rezonanslar + p^2\ cinsinden\ polinomlar$$

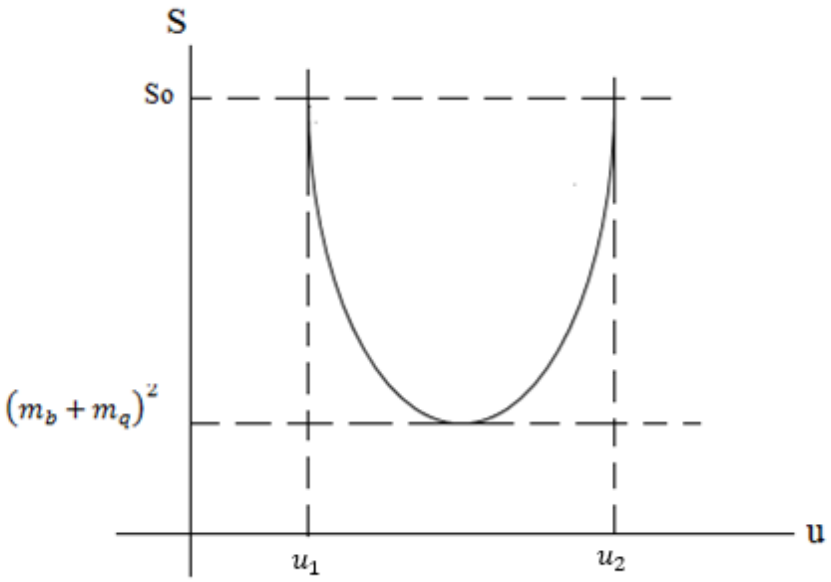
olarak yazılabilir. Toplam kurallarını elde etmek için bu ilişkilendirme fonksiyonuna Borel dönüşümü uygulanmalıdır.

Sırasıyla ilk olarak I_0 ifadesini irdeleyelim. $s(u) = \frac{m_b^2}{1-u} + \frac{m_q^2}{u}$ olarak tanımlanırsa

$$I_0 = sabit - \frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 du\left(\frac{d}{du}u\right)\ln\frac{\left(-p^2 + s(u)\right)}{\mu^2} \quad \textbf{(3.119)}$$

elde edilir.

Vakumdan ilgili kuarkı (bu hesaplamada mezonu) yaratabilmek için vakuma o kuarkın (mezonun) kütlesine eşit veya fazla bir enerji vermeniz gerekir. u_1 ve u_2 iki değişken olmak üzere $u_1 \leq u \leq u_2$ ve $s(u) \leq s_0$ olmak üzere Şekil 3.3'te gösterilmektedir. Bu aralıkta ilgili hadron yaratılabilir.



Şekil 3.3. s_u'nun değişim grafiği

$(\frac{d}{du}u)$ terimi işlemlerin kolaylığı açısından eklenmiştir. Bir örnek olması açısından spektral yoğunluğu ayrıntılı bir şekilde bulalım. (3.119) nolu ifadede kısmi integrasyon uygulanacak olunursa

$$I_0 = u \ln \frac{\left(-p^2 + s(u)\right)}{\mu^2}\Bigg]_{u=0}^{u=1} - \int_{u_1}^{u_2} du\, u\, \frac{s'(u)}{s(u) - p^2} \tag{3.120a}$$

$$= sabit - \int_0^{\infty} ds \frac{1}{s - p^2} \underbrace{\int_0^1 du\, \delta\big(s - s(u)\big) u s'(u)}_{\rho_1(s)}. \tag{3.120b}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse $u = 1$ için $sabit$ kısmı ıraksak olur. Burada $sabit$ olarak bahsedilen terim p^2'den bağımsız bir terim olduğundan ıraksak olması sorun teşkil etmez ve Borel dönüşümleri ile ortadan kalkar. Burada $(u_1) = s(u_2) = s_0$ ve $0 < u_1 < u_2 < 1$'dir. $\rho_1(s)$ ifadesi toplam kurallarının (3.117) eşitliğinin sağ tarafında yerine yazılırsa

$$\int_0^{s_0} ds \int_0^1 du\, e^{-\frac{s}{M^2}} \delta\big(s - s(u)\big) u s'(u)$$

$$= \int_0^1 du\, e^{-\frac{s(u)}{M^2}} u\, s'(u) \theta\big(s_0 - s(u)\big)$$

$$= \int_0^1 du\, u\ \ \theta\big(s_0 - s(u)\big) \frac{d}{du}\left(e^{-\frac{s(u)}{M^2}}\right)(-M^2)$$

$$= -M^2 u\ \ \theta\big(s_0 - s(u)\big)\, e^{-\frac{s(u)}{M^2}}\Bigg]_0^1 + M^2 \int_0^1 du\, e^{-\frac{s(u)}{M^2}} u \frac{d}{du}\Big(u\theta\big(s_0 - s(u)\big)\Big) \tag{3.121}$$

$$= M^2 \int_0^1 du\, e^{-\frac{s(u)}{M^2}} \Big(\theta\big(s_0 - s(u)\big) - s'(u) u \delta\big(s_0 - s(u)\big)\Big)$$

$$= M^2 \int_{u_1}^{u_2} du e^{-\frac{s(u)}{M^2}} + M^2 \int_0^1 du\, e^{-\frac{s(u)}{M^2}} u(-s'(u)) \left(\frac{\delta(u - u_1)}{|s'(u_1)|} + \frac{\delta(u - u_2)}{|s'(u_2)|}\right)$$

elde edilir. Son olarak $s(u_1) = s(u_2) = s_0$ ve $u_1 < u_2 < 1$ olmak üzere

$$I_0 \to M^2 \int_{u_1}^{u_2} du\, e^{-\frac{s(u)}{M^2}} + e^{-\frac{s(0)}{M^2}} (u_1 - u_2) \tag{3.122}$$

bulunur.

Toplam ilişkilendirme fonksiyonu olan (3.118) nolu eşitliğe bakıldığında $\frac{m_b\langle\bar{q}q\rangle}{p^2-m_b^2}$ ve $\frac{2p^2}{(p^2-m_b^2)^2}$ li terimlerin varlığı görülür. Dolayısıyla bu terimlerin de spektral yoğunluklarının bulunması gereklidir. İlk olarak

$$\frac{1}{p^2-m_b^2}=\int_0^{s_0}\frac{\rho(s)}{s-p^2}ds \tag{3.123}$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifade bize şunu söyler: $\rho(s)$ yerine nasıl bir ifade gelmelidir ki sonucu $\frac{1}{p^2-m_b^2}$ olsun? Dirac delta fonksiyonu bunun için uygundur:

$$\frac{1}{p^2-m_b^2}=\int_0^{s_0}\frac{ds}{s-p^2}\underbrace{-\delta(s-m_b^2)}_{\rho_2(s)}. \tag{3.124}$$

Böylelikle $\rho_2(s)$ bulunmuş olur. Bu spektral yoğunluk

$$\int_0^{s_0}ds\,e^{-\frac{s}{M^2}}\underbrace{-\delta(s-m_b^2)}_{\rho_2(s)}=e^{-\frac{m_{b^2}}{M^2}} \tag{3.125}$$

halini alır ki Borel dönüşümünden sonra ilişkilendirme fonksiyonuna $\frac{1}{p^2-m_b^2}$ teriminin katkısı

$$\frac{1}{p^2-m_b^2}\rightarrow e^{-\frac{m_{b^2}}{M^2}} \tag{3.126}$$

olur.

$\frac{2p^2}{(p^2-m_b^2)^2}$ terimine karşılık gelen spektral yoğunluğu bulmadan önce $\frac{1}{(p^2-m_b^2)^2}$ terimine karşılık gelen ifadeyi bulmak işlemleri kolaylaştırır. (3.124) nolu eşitlikten hatırlanacağı üzere $\frac{1}{p^2-m_b^2}=\int_0^\infty\frac{[-\delta(s-m_b^2)]}{s-p^2}ds$ idi. Buradan hareketle

$$\begin{gathered}\frac{1}{(p^2-m_b^2)^2}=\int_0^\infty\frac{\delta(s-m_b^2)}{(s-p^2)^2}ds\\ \frac{1}{(p^2-m_b^2)^2}=\int_0^\infty-\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{s-p^2}\right)\delta(s-m_b^2)ds\end{gathered} \tag{3.127}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafında kısmi integrasyon uygulanırsa şu sonuç elde edilir:

$$\frac{1}{(p^2-m_b^2)^2}=-\frac{1}{s-p^2}\delta(s-m_b^2)]_0^\infty+\int_0^\infty\frac{ds}{s-p^2}\frac{d}{ds}\delta(s-m_b^2) \tag{3.128}$$

$$= \int_0^\infty \frac{ds}{s-p^2} \underbrace{\frac{d}{ds}\delta(s-m_b^2)}_{\rho_3(s)}.$$

Böylelikle $\rho_3(s)$ ifadesi bulunmuş olunur. Benzer işlemlerle $\frac{1}{(p^2-m_b^2)^2}$ terimininin ilişkilendirme fonksiyonuna katkısı

$$\begin{aligned}
&\int_0^{s_0} e^{-\frac{s}{M^2}} \frac{d}{ds}\delta(s-m_b^2)\, ds \\
&= e^{-\frac{s}{M^2}}\delta(s-m_b^2)]_0^{s_0} - \int_0^{s_0} \delta(s-m_b^2)\frac{d}{ds}\left(e^{-\frac{s}{M^2}}\right) ds \\
&= \frac{1}{M^2}\int_0^{s_0} e^{-\frac{s}{M^2}}\delta(s-m_b^2)ds \\
&= \frac{1}{M^2} e^{-\frac{m_b^2}{M^2}}
\end{aligned} \tag{3.129}$$

şeklinde olur. $\frac{p^2}{(p^2-m_b^2)^2} = \frac{p^2-m_b^2+m_b^2}{(p^2-m_b^2)^2} = \frac{1}{p^2-m_b^2} + \frac{m_b^2}{(p^2-m_b^2)^2}$ şeklinde yazılırsa $\frac{2p^2}{(p^2-m_b^2)^2}$ teriminin katkısı

$$\frac{2p^2}{(p^2-m_b^2)^2} \to 2e^{-\frac{m_b^2}{M^2}} + \frac{2m_b^2}{M^2} e^{-\frac{m_b^2}{M^2}} \tag{3.130}$$

olarak elde edilir.

3.101 nolu ilişkilendirme fonksiyonuna ait katkılar şu şekildedir:

$$I_0 \to M^2 \int_{u_1}^{u_2} du\, e^{-\frac{s(u)}{M^2}} + e^{-\frac{s(0)}{M^2}}(u_1-u_2), \tag{3.131a}$$

$$\begin{aligned}
p^2 I_0 \to M^2 \Bigg(&\int_{u_1}^{u_2} e^{-\frac{s(u)}{M^2}} s(u)du + M^2(u_1-u_2)e^{-\frac{s_0}{M^2}} + M^2 \int_{u_1}^{u_2} e^{-\frac{s(u)}{M^2}} du \\
&+ e^{-\frac{s_0}{M^2}} s_0(u_1-u_2) \Bigg),
\end{aligned} \tag{3.131b}$$

$$\frac{1}{p^2-m_b^2} \to e^{-\frac{m_b^2}{M^2}}, \tag{3.131c}$$

$$\frac{1}{(p^2-m_b^2)^2} \to 2e^{-\frac{m_b^2}{M^2}} + \frac{1}{M^2} e^{-\frac{m_b^2}{M^2}}. \tag{3.131d}$$

Sonuç olarak (3.117) nolu ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik tarafı F, (s_o, M^2)'nin bir fonksiyonu olmak üzere

$$\Pi \equiv f_B^2 e^{-\frac{m_B^2}{M^2}} = \int_0^{s_0} \rho(s)\, e^{-\frac{s}{M^2}} ds = F(s_o, M^2) \tag{3.132}$$

şeklindedir. Toplam kuralını elde edeceğimiz (3.117) nolu eşitliğin $-\frac{1}{M^2}$'ye göre türevi alınacak olursa

$$\begin{gathered} -\frac{d}{d(\frac{1}{M^2})}\left(f_B^2 e^{-\frac{m_B^2}{M^2}}\right) = -\frac{d}{d(\frac{1}{M^2})}\int_0^{s_0} \rho(s)\, e^{-\frac{s}{M^2}} ds \\ m_B^2 f_B^2 e^{-\frac{m_B^2}{M^2}} = \int_0^{s_0} s\rho(s)\, e^{-\frac{s}{M^2}} ds \end{gathered} \tag{3.133}$$

olarak bulunur. (3.133) nolu ifadeyi (3.118) nolu ifadeye bölünürse B mezonu için toplam kuralı elde edilmiş olur:

$$m_{\mathrm{B}}^2 = M^4 \frac{1}{F(s_o, M^2)} \frac{dF(s_o, M^2)}{dM^2}. \tag{3.134}$$

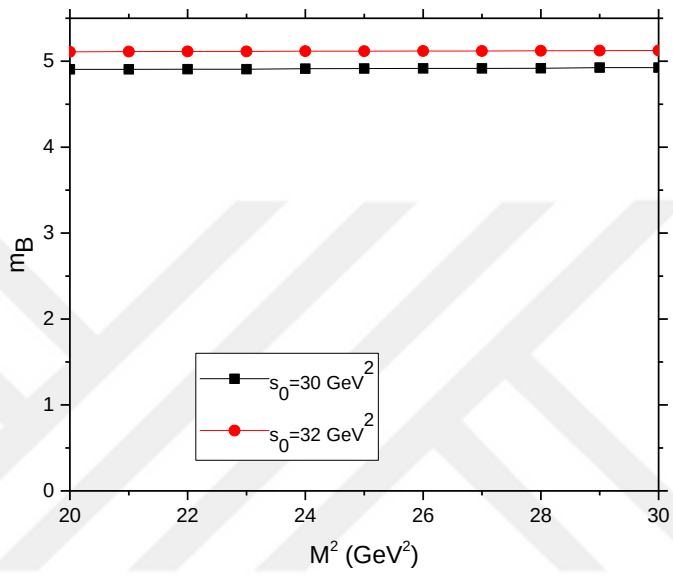
Bu toplam kuralından kütleyi elde etmek için s_o ve M^2 parametrelerine uygun değerlerin verilmesi gerekir. s_o için öngörülen değer $s_o \cong (m_h + 0.5\, GeV)^2$ olarak alınır. Borel parametresi olan M^2'nin seçimi fiziksel bir parametre olmadığı için s_o'dan biraz farklıdır.

3.4.4. Borel parametresinin seçimi

Toplam kurallarında en düşük seviyeli durumun kütlesi hesaplanabildiğinden M^2 mümkün olduğunca küçük olmalıdır. (3.133) ifadesinden de hatırlanacağı üzere Borel dönüşümü integralin içerisine üstel bir faktör getirir. Bu integrale esas katkı $s \cong M^2$ değerinde gelir. $s \geq M^2$ değerlerinde integrale katkı azalır, taban durumunun katkısı baskın olur. Dolayısıyla kuark-hadron düalitesi bu değer bölgesinde güvenilir sonuçlar verir. Büyük M^2 değerleri asimptotik özgürlüğün olduğu bölgedir ve bu bölgede hadronlaşmadan bahsedilemez. Bu nedenle kuark-hadron düalitesi yaklaşımı yapılamaz çünkü toplam kurallarına taban durumunun katkısı baskın değildir. Diğer yandan M^2 parametresi çok küçük değerleri alamaz. Aksi halde pertürbatif kısma gelen katkılar sonsuz olur. Bu veriler altında M^2 için uygun bir seçim şu şekilde yapılabilir: Taban seviyesinin katkısının baskın olduğu ve pertürbatif kısma gelen katkılardaki serilerin yakınsaklığının garantilendiği bir değer aralığı seçilmelidir. Böyle bir değer aralığında toplam kurallarından elde edilen fiziksel nicelikler M^2'ye

göre değişmez ya da diğer bir deyişle M^2 değişiminden bağımsız olmalıdır (Aydemir, 2007).

B mezonunun deneysel olarak ölçülmüş kütlesi $m_B = 5279\ MeV$'dir. Bu hesaplama sonucunda elde edilen kütle değeri $m_B = 5035 \pm 150\ MeV$'dir. Şekil 3.4'te farklı s_0 ve Borel parametresine göre kütle değişimi gösterilmektedir.



Şekil 3.4. B mezonu kütlesinin $s_0 = 30\ GeV^2$ ve $s_0 = 32\ GeV^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde $X(3872)$ ve olası eşleri için elde edilen kütle spektrumunun nümerik değerleri ile toplam kuralı analizi verilecektir.

4.1. $j(x)$ Akımının Belirlenmesi

Daha önceki bölümlerde KRDTK yönteminde ilişkilendirme fonksiyonunun içerisinde yer alan $j(x)$ işlemcisinin vakumdan ilgili hadronu oluşturacak şekilde seçileceği belirtilmişti. Dolayısıyla KRDTK yönteminde $j(x)$ işlemcisinin seçimi önemlidir çünkü toplam kurallarından elde edilen sonucun güvenirliği bu seçimle ilgilidir.

$X(3872)$'in içeriği tam olarak aydınlatılmamış olması literatürde farklı işlemcilerin kullanılmasına yol açmıştır. $j(x)$ işlemcilerinin vakumdan sadece $X(3872)$ yaratacak şekilde seçimi her zaman mümkün olmayabilir. Uyarılmış durumların da oluşabileceği gibi taban durumuna katkı veren seviyelerin çokluğu sorun yaratabilir.

Moleküler bakış açısıyla $X(3872)$'in içeriğinde iki ağır kuark ve iki hafif kuark olmalıdır. Moleküler resimde $X(3872)$, D ve D^* durumlarının $J^{PC} = 1^{++}$ kuantum sayılı durumunu oluşturacak şekilde bağlı durum oluştuğu düşünülür (Hidalgo-Duque vd, 2013):

$$|X(3872)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|D\bar{D}^*\rangle - |\bar{D}D^*\rangle). \tag{4.1}$$

Kuark yapıları açık şekilde yazılacak olursa yukarıdaki durum şöyle ifade edilebilir:

$$|X(3872)\rangle = \left|\left(S_{c\bar{c}} = 1; S_{q\bar{q}} = 1\right)J = 1\right\rangle. \tag{4.2}$$

Molekülü oluşturacak iki ağır ve hafif kuarkın toplam spini 1'dir. Spinleri 1 olan iki sistem bir araya geldiğinde açısal momentum toplam kurallarına göre oluşacak sistemin spini 2,1,0 olabilir. $X(3872)$'nin J kuantum sayısının 1 olduğu hatırlanırsa spini 2 ve 0 olan durumlara $X(3872)$'nin eşleri denir.

Bu tez kapsamında Hidalgo-Duque vd. (2013) tarafından önerilen

$$j_{\mu\nu} = \bar{Q}^a \gamma_\mu Q^b \bar{q}^b \gamma_\nu q^a \tag{4.3}$$

akımı kullanılmıştır. Bu akım $X(3872)$ ve eşlerinin ağır kuark limitinde incelenmesi için önerilmiştir. Burada a ve b renk indisleridir. İncelememizde $Q = c$ olarak alınmıştır.

4.2. İlişkilendirme Fonksiyonunun KRD Kısmı

B mezonu kütle hesabında olduğu gibi seçilen akım ilişkilendirme fonksiyonunda yerine yazılır ve gelişimi incelenir. İlişkilendirme fonksiyonunun hadronik kısmı için elde edilen ifade

$$\Pi = i \int d^4x\, e^{iqx}\, Iz\left[iS_Q^{aa'}(-x)\gamma_\alpha iS_Q^{bb'}(x)\gamma_\delta\right] Iz\left[\gamma_\beta iS_q^{aa'}(x)\gamma_\gamma iS_q^{bb'}(-x)\right] \quad \textbf{(4.4)}$$

halini alır. Burada $iS_Q^{aa'}(x)$ ve $iS_q^{bb'}(x)$ ile sırasıyla ağır kuark ve hafif kuark ilerleticileri temsil edilmektedir. Ağır kuark için bu ilerleticinin açık hali (Reinders vd, 1985)

$$\begin{aligned} iS_Q^{ab}(x) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \Bigg\{ & \frac{\delta_{ab}\left(\not{k} + m_Q\right)}{k^2 - m_Q^2} \\ & - \frac{g_s G_{ab}^{\alpha\beta}}{4} \frac{\sigma_{\alpha\beta}\left(\not{k} + m_Q\right) + \left(\not{k} + m_Q\right)\sigma_{\alpha\beta}}{\left(k^2 - m_Q^2\right)^2} \\ & + \frac{g_s^2 G^2}{12} \delta_{ab} m_Q \frac{k^2 + m_Q \not{k}}{\left(k^2 - m_Q^2\right)^4} \\ & + \frac{g_s^3 G^3}{48} \delta_{ab} \frac{\left(\not{k} + m_Q\right)}{\left(k^2 - m_Q^2\right)^6} \left[\not{k}\left(k^2 - 3m_Q^2\right)\right. \\ & \left. + 2m_Q\left(2k^2 - m_Q^2\right)\right]\left(\not{k} + m_Q\right) + \cdots \Bigg\}. \end{aligned} \quad \textbf{(4.5)}$$

şeklindedir. Bu ifadede a ve b renk indisleri olup α ve β ise spinor indisleridir. Hafif kuark için ilerletici

$$
\begin{aligned}
iS_{q,ab}^{\alpha\beta}(x) = {} & \frac{i}{2\pi^2}\frac{1}{(x^2)^2}\delta_{ab}\not{x}^{\alpha\beta} - \frac{1}{12}\delta_{ab}\delta^{\alpha\beta}\langle\bar{q}q\rangle \\
& - \frac{1}{192}x^2\delta_{ab}\delta^{\alpha\beta}g_s\langle\bar{q}\sigma.Gq\rangle \\
& + \left(-\frac{i}{32\pi^2}\right)\frac{1}{x^2}g_s G_{\mu\nu}^A t_{ab}^A\left(\not{x}\sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}\not{x}\right)^{\alpha\beta} \\
& + \left(-\frac{\pi^2}{3^3 2^7}\right)x^4\delta_{ab}\delta^{\alpha\beta}\langle\bar{q}q\rangle\left\langle\frac{\alpha_s}{\pi}G^2\right\rangle \\
& + \left(-\frac{1}{4\pi^2}\right)\frac{1}{x^2}\delta_{ab}\delta^{\alpha\beta}m_q + \frac{i}{48}\delta_{ab}m_q\langle\bar{q}q\rangle\not{x}^{\alpha\beta} \\
& + \frac{i}{3^3 2^7}x^2\delta_{ab}m_q g_s\langle\bar{q}\sigma.Gq\rangle\not{x}^{\alpha\beta} \qquad \textbf{(4.6)} \\
& + \left(-\frac{1}{32\pi^2}\right)\left[\ln\left(-\frac{x^2\Lambda^2}{4}\right) + 2\gamma_{EM}\right]m_q g_s G_{\mu\nu}^A t_{ab}^A(\sigma^{\mu\nu})^{\alpha\beta} \\
& + \frac{i}{8\pi^2}\frac{1}{x^2}\delta_{ab}m_q^2\not{x}^{\alpha\beta} + \frac{1}{96}x^2\delta_{ab}\delta^{\alpha\beta}m_q^2\langle\bar{q}q\rangle \\
& + \frac{i}{2^7\pi^2}\left[\ln\left(-\frac{x^2\Lambda^2}{4}\right) + 2\gamma_{EM}\right]m_q^2 g_s G_{\mu\nu}^A t_{ab}^A\left(\not{x}\sigma^{\mu\nu}\right. \\
& \left. + \sigma^{\mu\nu}\not{x}\right)^{\alpha\beta} + \frac{1}{3^2 2^8}x^4\delta_{ab}\delta^{\alpha\beta}m_q^2 g_s\langle\bar{q}\sigma.Gq\rangle \\
& - \frac{i}{3^5 2^5}x^2\delta_{ab}g_s^2\langle\bar{q}q\rangle^2\not{x}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3^5 2^7}x^4\delta_{ab}\delta^{\alpha\beta}m_q g_s^2\langle\bar{q}q\rangle^2
\end{aligned}
$$

olarak verilir. İlerleticilerin bu ifadeleri ilişkilendirme fonksiyonunda operatör boyutlarına ve ilgili hadronu yaratacak kısmın ağır kuark-ağır kuark etkileşimi, ağır kuark-hafif kuark etkileşimi ve hafif kuark-hafif kuark etkileşimden oluşma ihtimali göz önüne alınarak yazılır ve istenen fiziksel nicelik elde edilir. Bu çalışmada kullanılan akım neticesinde ilişkilendirme fonksiyonunun hadronik kısmına $d = 0$ ve $d = 4$ boyutlu işlemciler katkı vermiş ve $d = 3$ terimi (kuark yoğuşması (kondensat)) katkı vermemiştir. Ayrıca hafif kuark ilerleticisinde $m_q \to 0$ limiti kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlarda momentum ve metrik ifadelerine dayalı toplamda 10 tane yapıda sonuç vermiştir. Bu sonuçlar ek kısmında verilmiştir.

İlişkilendirme fonksiyonu

$$
\Pi(q^2) = i\int d^4x\, e^{ipx}\left\langle 0\middle|T\{j(x)j^\dagger(0)\}\middle|0\right\rangle \qquad \textbf{(4.7)}
$$

olarak yazıldığında $q^2 > 0$ momentum bölgesi için

$$\Pi = \sum_h \langle 0|j|h(p)\rangle \frac{1}{p^2 - m^2} \langle h(p)|j^\dagger|0\rangle + çoklu\ hadron\ durumları \qquad \textbf{(4.8)}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada $h(p)$ ile vakumdan oluşan p momentumlu hadron temsil edilir. Bu ifade, ilişkilendirme fonksiyonundaki akımların arasına birim işlemcinin hadron durumları üzerinden toplamı yazılarak elde edilmiştir. Paydada oluşan tekillik bize ilgili hadronun kütlesini verecektir. Bu gösterimde toplam kuralları

$$|\langle 0|j|h(p)\rangle|^2 e^{-\frac{m_h^2}{M^2}} = \int_0^{s_0} \rho^{KRD}(s)\ e^{-\frac{s^2}{M^2}} ds \qquad \textbf{(4.9)}$$

ile yazılır.

4.3. İlişkilendirme Fonksiyonunun Fenomenolojik Kısmı

Toplam kurallarını elde etmek için ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik kısmının yazılması gerekir. Bu çalışmada $X(3872)$ ve eşleri ele alındığından spine bağlı bir fenomenolojik ifade yazmak uygundur. Burada dikkat edilmesi gereken bir husus fenomenolojik kısım hadronik kısımla ilintilidir ve hadronik kısım elde edilirken spine bağlı her hangi bir işlem yapılmamıştır. Dolayısıyla $X(3872)$ ve eşlerini toplam kurallarından ayrıştırmak gerekir. Projeksiyon işlemcileri bunun için uygundur.

Örneğin $\vec{A} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$ vektörünü bileşenlerine ayırmak için projeksiyon işlemcisi kullanılır. Vektörün x eksenindeki bileşenini elde etmek için $\hat{P} = \hat{\imath}$ projeksiyon işlemcisi $\vec{A}$ vektörüne etki ettiğinde x bileşeni yani a_x elde edilir. Buna benzer bir yöntemle tanımlanan projeksiyon işlemcileri yardımıyla $X(3872)$ ve eşlerinin kütleleri elde edilebilir.

(4.3) nolu eşitlikteki verilen akım

$$j_{\mu\nu} = j_{\mu\nu}^{2+} + j_{\mu\nu}^{1+} + j_{\mu\nu}^{0+} \qquad \textbf{(4.10)}$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Burada $j_{\mu\nu}^{2+}$, $j_{\mu\nu}^{1+}$ ve $j_{\mu\nu}^{0+}$ sırasıyla şu şekilde yazılır:

$$j_{\mu\nu}^{2+} = P_{2\mu\nu}{}^{\alpha\beta} j_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}\right) j_{\alpha\beta}$$
$$= \frac{1}{2}\left(j_{\mu\nu} + j_{\nu\mu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}j_{\alpha}{}^{\alpha}\right) \tag{4.11}$$

$$j_{\mu\nu}^{1+} = P_{1\mu\nu}{}^{\alpha\beta} j_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right) j_{\alpha\beta}$$
$$= \frac{1}{2}\left(j_{\mu\nu} - j_{\nu\mu}\right) \tag{4.12}$$

ve

$$j_{\mu\nu}^{0+} = P_{0\mu\nu}{}^{\alpha\beta} j_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}j_{\delta}{}^{\delta}. \tag{4.13}$$

Burada tanımlanan $P_{2\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$, $P_{1\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$ ve $P_{0\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$ projeksiyon işlemcileridir (Hidalgo-Duque vd, 2013). Bu akımlardan $j_{\mu\nu}^{2+}$, $J^{PC} = 2^{++}$, $J^{PC} = 1^{++}$ ve $J^{PC} = 0^{++}$ durumlarını, $j_{\mu\nu}^{1+}$ $J^{PC} = 1^{++}$ ve $J^{PC} = 1^{-+}$ durumlarını ve $j_{\mu\nu}^{0+}$, $J^{PC} = 0^{++}$ durumunu vakumdan yaratabilirler ve bu durumları incelemek için kullanılabilir.

4.3.1. $j_{\mu\nu}^{2+}$ ile yazılan ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik kısmı

Matris elemanları

$$\left\langle 2^{++}\middle| j_{\mu\nu}^{(2)} \middle|0\right\rangle = \lambda_2^{2++}\epsilon_{\mu\nu} \tag{4.14a}$$

$$\left\langle 1^{++}\middle| j_{\mu\nu}^{(2)} \middle|0\right\rangle = \lambda_2^{1++}\left(\epsilon_{\mu}p_{\nu} + p_{\mu}\epsilon_{\nu}\right) \tag{4.14b}$$

$$\left\langle 0^{++}\middle| j_{\mu\nu}^{(2)} \middle|0\right\rangle = \lambda_2^{0++}\left(\frac{p_{\mu}p_{\nu}}{p^2} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\right) \tag{4.14c}$$

ve akım

$$j_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(j_{\mu\nu} + j_{\nu\mu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}j_{\delta}^{\delta}\right) \tag{4.15}$$

olmak üzere $j_{\mu\nu}^{(2)}$ için ilişkilendirme fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta} &= i\int d^4x\, e^{ipx}\left\langle 0\left|T\left\{j^{(2)}_{\mu\nu}(x)j^{(2)\dagger}_{\alpha\beta}(0)\right\}\right|0\right\rangle \\
&= \sum_h \frac{\left\langle 0\left|j^{(2)}_{\mu\nu}\right|h(p)\right\rangle\left\langle h(p)\left|j^{(2)\dagger}_{\alpha\beta}\right|0\right\rangle}{p^2-m_h^2} \\
&= \frac{\left\langle 0\left|j^{(2)}_{\mu\nu}\right|2^{++}(p)\right\rangle\left\langle 2^{++}(p)\left|j^{(2)\dagger}_{\alpha\beta}\right|0\right\rangle}{p^2-m_{2++}^2} \\
&+ \frac{\left\langle 0\left|j^{(2)}_{\mu\nu}\right|1^{++}(p)\right\rangle\left\langle 1^{++}(p)\left|j^{(2)\dagger}_{\alpha\beta}\right|0\right\rangle}{p^2-m_{1++}^2} \\
&+ \frac{\left\langle 0\left|j^{(2)}_{\mu\nu}\right|0^{++}(p)\right\rangle\left\langle 0^{++}(p)\left|j^{(2)\dagger}_{\alpha\beta}\right|0\right\rangle}{p^2-m_{0++}^2} \\
&= \frac{(\lambda_2^{2++})^2}{p^2-m_{2++}^2}\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} \\
&+ \frac{(\lambda_2^{1++})^2}{p^2-m_{1++}^2}\sum_s \left(\epsilon_\mu p_\nu + p_\mu\epsilon_\nu\right)\left(\epsilon^*_\alpha p_\beta + p_\alpha\epsilon^*_\beta\right) \\
&+ \frac{(\lambda_2^{0++})^2}{p^2-m_{0++}^2}\left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2}-\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\right).
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Burada ϵ_μ ve $\epsilon_{\mu\nu}$ sırasıyla spin-1 ve spin-2 parçacıklarının kutuplanma (polarizasyon) tensörleri ve p akım tarafından yaratılan hadronun momentumudur. Toplam sembolleriyle spin durumları üzerinden toplam alınacağı anlaşılır. Lineer cebirden bilindiği üzere herhangi bir vektörü istediğimiz ortanormal baz setinde yazabiliriz. Dolayısıyla $\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ifadesi ne olursa olsun eşitliğin sağ tarafında verilen bazlar cinsinden yazılabilir.

İlişkilendirme fonksiyonundaki akım vasıtası ile vakumdan J^{PC} kuantum sayıları $2^{++}, 1^{++}$ ve 0^{++} olan durumlar yaratılabilir. Spin-2 bir parçacığın kutuplanma tensörleri indislerde simetriktir, $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\nu\mu}$. Ayrıca momentuma dik olup $\epsilon_{\mu\nu}p^\mu = 0$, izsizdir $g^{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu} = 0$. Kutuplanma tensörlerinin boylandırılması (normlanması) $\epsilon_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu} = 1$ ve $\epsilon^\mu\epsilon_\mu = -1$ şeklindedir. Fenomenolojik kısımdan kütle hesabını yapmak için açılımdaki baz setlerinin birbirlerine dik olmasından faydalanılır. Üç boyutlu Öklit uzayındaki baz setleri $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ ve $\hat{k}$'nın birbirleri ile iç çarpımının sıfır olmasına benzer olarak fenomenolojik kısımdaki baz setlerinin de iç çarpımı sıfırdır:

$$\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} \sum_s (\epsilon_\mu p_\nu + p_\mu \epsilon_\nu)(\epsilon^*_\alpha p_\beta + p_\alpha \epsilon^*_\beta) = 0 \tag{4.17}$$

$$\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\right) = 0 \tag{4.18}$$

$$\sum_s (\epsilon_\mu p_\nu + p_\mu \epsilon_\nu)(\epsilon^*_\alpha p_\beta + p_\alpha \epsilon^*_\beta) \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\right) = 0. \tag{4.19}$$

Bu iç çarpımları yaparken

$$\begin{aligned}\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Bigg\{&\left(g_{\mu\alpha} - \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2}\right)\left(g_{\nu\beta} - \frac{p_\nu p_\beta}{p^2}\right) \\ &+ \left(g_{\nu\alpha} - \frac{p_\nu p_\alpha}{p^2}\right)\left(g_{\mu\beta} - \frac{p_\mu p_\beta}{p^2}\right) \\ &- \frac{2}{3}\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\left(g_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2}\right)\Bigg\}\end{aligned} \tag{4.20}$$

ve

$$\sum_s \epsilon_\mu \epsilon^*_\nu = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \equiv -g^{\Delta}_{\mu\nu} \tag{4.21}$$

kutuplanma toplamlarından yararlanılır.

Fenomenolojik kısmın bazlarındaki katsayılar spin durumlarına göre kütleleri verir. Bu katsayıları elde etmenin yolu ilgili bazların iç çarpımı ve projeksiyon işlemcilerinin kullanımıdır.

$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ilişkilendirme fonksiyonu $\kappa^{(22)}_{\mu\nu\alpha\beta}$, $\kappa^{(21)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ve $\kappa^{(20)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ Lorentz yapıları olmak üzere

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{(\lambda_2^{2++})^2}{p^2 - m^2_{2++}}\kappa^{(22)}_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{(\lambda_2^{1++})^2}{p^2 - m^2_{1++}}\kappa^{(21)}_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{(\lambda_2^{0++})^2}{p^2 - m^2_{0++}}\kappa^{(20)}_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{4.22}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki bir problem, bu ilişkilendirme fonksiyonu işlemci çarpımı açılımı (İÇA) cinsinden hesaplandığı zaman farklı parçacıkların katkılarının ayrıştırılmasıdır. Bu sorun tanımlanan Lorentz yapılarının

$$\kappa^{2i}{}_{\mu\nu\alpha\beta}\kappa^{2j;\mu\nu\alpha\beta} = 0 \; eğer \; i \neq j \; ise \tag{4.23}$$

olmasından, yani birbirlerine dik olmasından yararlanılarak aşılabilir.

4.3.1.1. 2^{++} için kütle tayfı

$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan 2^{++} durumunun kütlesini elde etmek için fonksiyonu $\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta}$ bazıyla iç çarpım yapmak gerekir:

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} = \left(\frac{(\lambda_2^{2++})^2}{p^2-m_{2++}^2}\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} + \frac{(\lambda_2^{1++})^2}{p^2-m_{1++}^2}\sum_s\left(\epsilon_\mu p_\nu + p_\mu\epsilon_\nu\right)\left(\epsilon^*_\alpha p_\beta + p_\alpha\epsilon^*_\beta\right) + \frac{(\lambda_2^{0++})^2}{p^2-m_{0++}^2}\left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2}-\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\right)\right)\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} \tag{4.24}$$

$\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta}$ bazının diğer bazlara dik oluşundan faydalanarak

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} = \frac{(\lambda_2^{2++})^2}{p^2-m_{2++}^2}\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta}\sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} \tag{4.25}$$

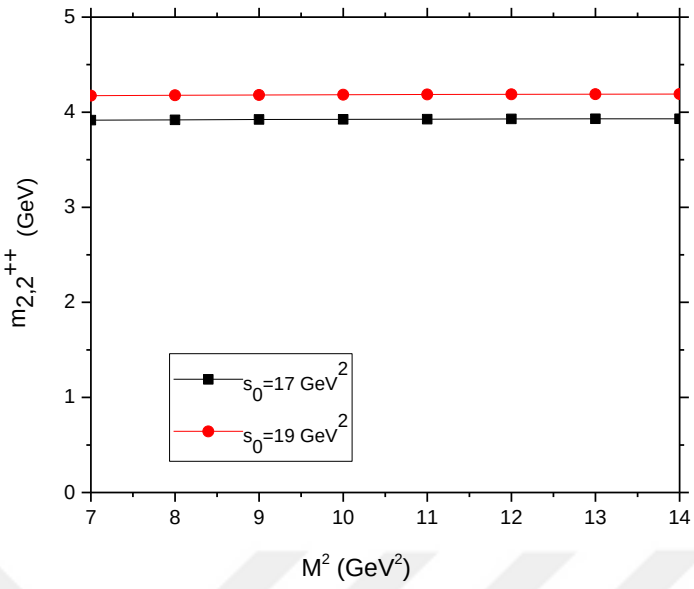
elde edilir. Lorentz yapısı

$$\kappa^{(22)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_s \epsilon_{\mu\nu}\epsilon^*_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(g^{\Delta}_{\mu\alpha}g^{\Delta}_{\nu\beta} + g^{\Delta}_{\nu\alpha}g^{\Delta}_{\mu\beta} - \frac{2}{3}g^{\Delta}_{\mu\nu}g^{\Delta}_{\alpha\beta}\right) \tag{4.26}$$

olarak tanımlanırsa. 2^{++} parçacığı için kütle ifadesi

$$\frac{(\lambda_2^{2++})^2}{p^2-m_{2++}^2} = \frac{1}{5}\kappa^{(22)}_{\mu\nu\alpha\beta}\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{4.27}$$

olarak elde edilir. Şekil 4.1'de $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \to 2^{++}$ için kütle tayfı farklı s_0 ve M^2 değerleri için gösterilmektedir.



Şekil 4.1. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 2^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ GeV^2$ ve $s_0 = 19\ GeV^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi

4.3.1.2. 1^{++} için kütle tayfı

Bir önceki kısımda yapılan adımlar izlenerek 1^{++} için kütle tayfı elde edilebilir. $\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ilişkilendirme fonksiyonu $\sum_s(\epsilon_\mu p_\nu + p_\mu \epsilon_\nu)(\epsilon^*_\alpha p_\beta + p_\alpha \epsilon^*_\beta)$ ile çarpılırsa

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta} \sum_s (\epsilon_\mu p_\nu + p_\mu \epsilon_\nu)(\epsilon^*_\alpha p_\beta + p_\alpha \epsilon^*_\beta)$$
$$= \frac{(\lambda_2^{1++})^2}{p^2 - m^2_{1++}} \sum_s (\epsilon_\mu p_\nu + p_\mu \epsilon_\nu)(\epsilon^*_\alpha p_\beta + p_\alpha \epsilon^*_\beta) \sum_s (\epsilon_\mu p_\nu + p_\mu \epsilon_\nu)(\epsilon^*_\alpha p_\beta + p_\alpha \epsilon^*_\beta) \quad \textbf{(4.28)}$$

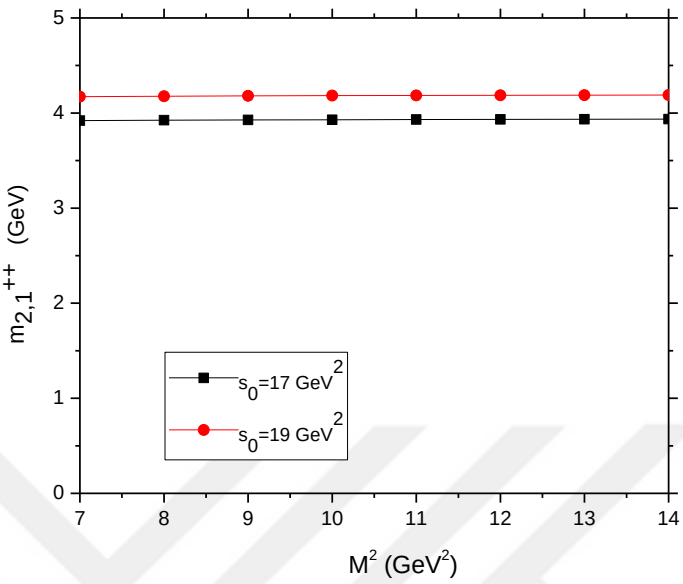
elde edilir. Bu durum için Lorentz yapısı şu şekildedir:

$$\kappa^{(21)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_s (\epsilon_\mu p_\nu + p_\mu \epsilon_\nu)(\epsilon^*_\alpha p_\beta + p_\alpha \epsilon^*_\beta)$$
$$= -(g^\Delta_{\mu\alpha} p_\nu p_\beta + g^\Delta_{\mu\beta} p_\nu p_\alpha + g^\Delta_{\nu\alpha} p_\mu p_\beta + g^\Delta_{\nu\beta} p_\mu p_\alpha). \quad \textbf{(4.29)}$$

1^{++} durumu için kütle ifadesi

$$\frac{(\lambda_2^{1++})^2}{p^2 - m^2_{1++}} = \frac{1}{6p^2} \kappa^{(21)}_{\mu\nu\alpha\beta} \Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta} \quad \textbf{(4.30)}$$

olarak elde edilir. Şekil 4.2'de $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \to 1^{++}$ için kütle tayfı farklı s_0 ve M^2 değerleri için gösterilmektedir.



Şekil 4.2. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 1^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ GeV^2$ ve $s_0 = 19\ GeV^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi

4.3.1.3. 0^{++} için kütle tayfı

$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ilişkilendirme fonksiyonu $\left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\right)$ ile çarpılırsa

$$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}\left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\right) = \frac{(\lambda_2^{0++})^2}{p^2 - m_{0++}^2}\left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\right)\left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\right) \quad \textbf{(4.31)}$$

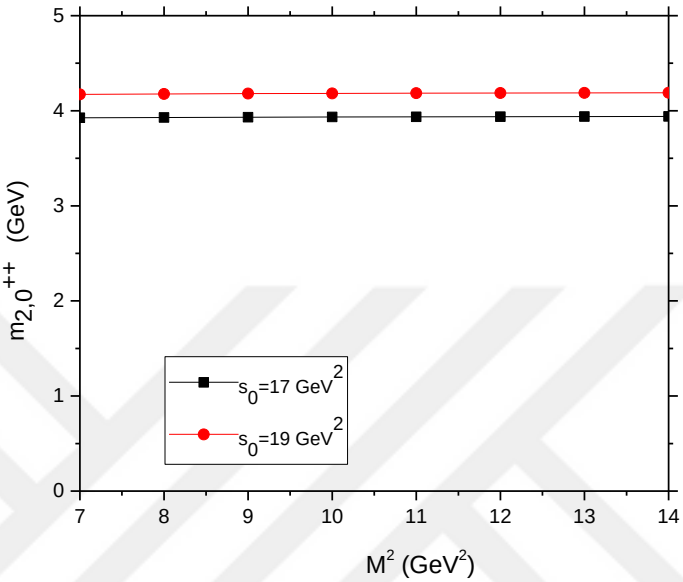
ve Lorentz yapısı olarak

$$\kappa^{(20)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \left(\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}\right)\left(\frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}\right) \quad \textbf{(4.32)}$$

kullanılırsa 0^{++} durumu için kütle ifadesi

$$\frac{(\lambda_2^{0++})^2}{p^2 - m_{0++}^2} = \frac{16}{9}\kappa_{\mu\nu\alpha\beta}^{(20)}\Pi_{\mu\nu\alpha\beta}^{(2)} \tag{4.33}$$

olarak bulunur. Şekil 4.3'te $\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} \to 0^{++}$ için kütle tayfı farklı s_0 ve M^2 değerleri için gösterilmektedir.



Şekil 4.3. $\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 0^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ GeV^2$ ve $s_0 = 19\ GeV^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi

4.3.2. $j_{\mu\nu}^{(1)}$ ile yazılan ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik kısmı

Matris elemanları

$$\left\langle 0 \middle| j_{\mu\nu}^{(1)} \middle| 1^{++} \right\rangle = \lambda_1^{1++}(p_\mu \epsilon_\nu - p_\nu \epsilon_\mu) \tag{4.34a}$$

$$\left\langle 0 \middle| j_{\mu\nu}^{(1)} \middle| 1^{-+} \right\rangle = \lambda_1^{1-+}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p^\alpha \epsilon'^\beta \tag{4.34b}$$

ve akım

$$j_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(j_{\mu\nu} - j_{\nu\mu}) \tag{4.34c}$$

olmak üzere $j_{\mu\nu}^{(1)}$ için ilişkilendirme fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta} &= i\int d^4x\, e^{ipx}\left\langle 0\middle|T\left\{j^{(1)}_{\mu\nu}(x)j^{(1)\dagger}_{\alpha\beta}(0)\right\}\middle|0\right\rangle \\
&= \sum_h \frac{\left\langle 0\middle|j^{(1)}_{\mu\nu}\middle|h(p)\right\rangle\left\langle h(p)\middle|j^{(1)\dagger}_{\alpha\beta}\middle|0\right\rangle}{p^2-m_h^2} \\
&= \frac{\left\langle 0\middle|j^{(1)}_{\mu\nu}\middle|1^{++}(p)\right\rangle\left\langle 1^{++}(p)\middle|j^{(1)\dagger}_{\alpha\beta}\middle|0\right\rangle}{p^2-m_{1++}^2} \\
&+ \frac{\left\langle 0\middle|j^{(1)}_{\mu\nu}\middle|1^{-+}(p)\right\rangle\left\langle 1^{-+}(p)\middle|j^{(1)\dagger}_{\alpha\beta}\middle|0\right\rangle}{p^2-m_{1-+}^2} \\
&= \frac{(\lambda_1^{1++})^2}{p^2-m_{1++}^2}\sum_s\left(p_\mu\epsilon_\nu - p_\nu\epsilon_\mu\right)\left(p_\alpha\epsilon^*_\beta - p_\beta\epsilon^*_\alpha\right) \\
&+ \frac{(\lambda_1^{1-+})^2}{p^2-m_{1-+}^2}\sum_s \epsilon_{\mu\nu\bar{\mu}\bar{\nu}}p^{\bar{\mu}}\epsilon'^{\bar{\nu}}\,\epsilon_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}}p^{\bar{\alpha}}\epsilon'^{\bar{\beta}*}.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Spin-1 durumununun polarizasyon vektörleri $\epsilon_\mu p^\mu = 0$ ve $\epsilon_\mu\epsilon^\mu = -1$ eşitliklerini sağlar. Bu durum için de baz setlerinin birbirine dik olduğu kullanılarak bileşenlerin ilişkilendirme fonksiyonuna katkısı ayrıştırılabilir:

$$
\sum_s\left(p_\mu\epsilon_\nu - p_\nu\epsilon_\mu\right)\left(p_\alpha\epsilon^*_\beta - p_\beta\epsilon^*_\alpha\right)\sum_s \epsilon_{\mu\nu\bar{\mu}\bar{\nu}}p^{\bar{\mu}}\epsilon'^{\bar{\nu}}\,\epsilon_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}}p^{\bar{\alpha}}\epsilon'^{\bar{\beta}*} = 0. \tag{4.36}
$$

Yine benzer şekilde $\kappa^{(1+)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ve $\kappa^{(1-)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ iki Lorentz yapısı olmak üzere $\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ilişkilendirme fonksiyonu

$$
\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{(\lambda_1^{1++})^2}{p^2-m_{1++}^2}\kappa^{(1+)}_{\mu\nu\alpha\beta} + \frac{(\lambda_1^{1-+})^2}{p^2-m_{1-+}^2}\kappa^{(1-)}_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{4.37}
$$

şeklinde yazılabilir. Lorentz yapılarının birbirlerine dik olmasından yararlanılarak ilgili kütleler bulunabilir.

4.3.2.1. 1^{++} için kütle tayfı

$\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan 1^{++} durumunun kütlesini elde etmek için fonksiyonu $\sum_s\left(p_\mu\epsilon_\nu - p_\nu\epsilon_\mu\right)\left(p_\alpha\epsilon^*_\beta - p_\beta\epsilon^*_\alpha\right)$ bazıyla iç çarpım yapmak gerekir:

$$\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}\sum_{s}(p_\mu\epsilon_\nu - p_\nu\epsilon_\mu)(p_\alpha\epsilon^*_\beta - p_\beta\epsilon^*_\alpha)$$

$$= \left(\frac{(\lambda_1^{1++})^2}{p^2 - m^2_{1++}}\sum_{s}(p_\mu\epsilon_\nu - p_\nu\epsilon_\mu)(p_\alpha\epsilon^*_\beta - p_\beta\epsilon^*_\alpha)\right.$$

$$\left. + \frac{(\lambda_1^{1-+})^2}{p^2 - m^2_{1-+}}\sum_{s}\epsilon_{\mu\nu\bar{\mu}\bar{\nu}}p^{\bar{\mu}}\epsilon'^{\bar{\nu}}\,\epsilon_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}}p^{\bar{\alpha}}\epsilon'^{\bar{\beta}*}\right)\sum_{s}(p_\mu\epsilon_\nu - p_\nu\epsilon_\mu)(p_\alpha\epsilon^*_\beta - p_\beta\epsilon^*_\alpha). \quad \textbf{(4.38)}$$

Bu durum için Lorentz yapısı

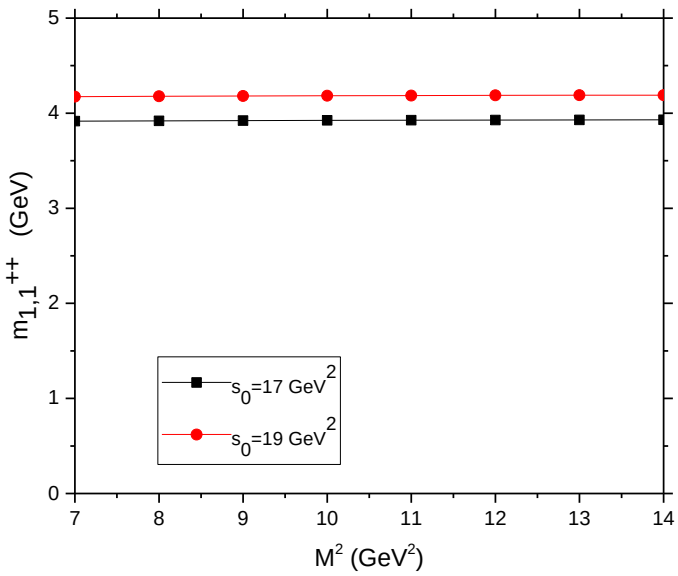
$$\kappa^{(1+)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_{s}(p_\mu\epsilon_\nu - p_\nu\epsilon_\mu)(p_\alpha\epsilon^*_\beta - p_\beta\epsilon^*_\alpha) \quad \textbf{(4.39)}$$

$$= -(p_\mu p_\alpha g^{\Delta}_{\nu\beta} - p_\mu p_\beta g^{\Delta}_{\nu\alpha} - p_\nu p_\alpha g^{\Delta}_{\mu\beta} + p_\nu p_\beta g^{\Delta}_{\mu\alpha})$$

ile verilir. Lorentz yapısıyla birlikte 1^{++} durumu için kütle ifadesi

$$\frac{(\lambda_1^{1++})^2}{p^2 - m^2_{1++}} = \frac{1}{12}\kappa^{(1+)}_{\mu\nu\alpha\beta}\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta} \quad \textbf{(4.40)}$$

olarak elde edilir. Şekil 4.4'te $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \to 1^{++}$ için kütle tayfı farklı s_0 ve M^2 değerleri için gösterilmektedir.



Şekil 4.4. $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 1^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ GeV^2$ ve $s_0 = 19\ GeV^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi

4.3.2.2. 1^{-+} için kütle tayfı

$\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan 1^{-+} durumunun kütlesini elde etmek için fonksiyonu $\sum_s \epsilon_{\mu\nu\bar{\mu}\bar{\nu}} p^{\bar{\mu}} \epsilon'^{\bar{\nu}} \epsilon_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}} p^{\bar{\alpha}} \epsilon'^{\bar{\beta}*}$ bazıyla iç çarpım yapmak gerekir:

$$\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta} \sum_s \epsilon_{\mu\nu\bar{\mu}\bar{\nu}} p^{\bar{\mu}} \epsilon'^{\bar{\nu}} \epsilon_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}} p^{\bar{\alpha}} \epsilon'^{\bar{\beta}*}$$

$$= \left(\frac{(\lambda_1^{1++})^2}{p^2 - m_{1++}^2} \sum_s \left(p_\mu \epsilon_\nu - p_\nu \epsilon_\mu\right)\left(p_\alpha \epsilon_\beta^* - p_\beta \epsilon_\alpha^*\right) \right. \tag{4.41}$$

$$\left. + \frac{(\lambda_1^{1-+})^2}{p^2 - m_{1-+}^2} \sum_s \epsilon_{\mu\nu\bar{\mu}\bar{\nu}} p^{\bar{\mu}} \epsilon'^{\bar{\nu}} \epsilon_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}} p^{\bar{\alpha}} \epsilon'^{\bar{\beta}*} \right) \sum_s \epsilon_{\mu\nu\bar{\mu}\bar{\nu}} p^{\bar{\mu}} \epsilon'^{\bar{\nu}} \epsilon_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}} p^{\bar{\alpha}} \epsilon'^{\bar{\beta}*}.$$

Lorentz yapısı için

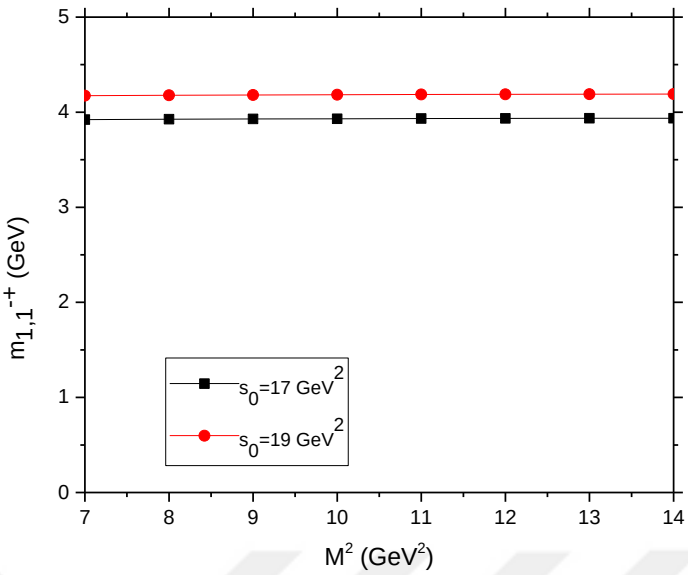
$$\kappa^{(1-)}_{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_s \epsilon_{\mu\nu\bar{\mu}\bar{\nu}} p^{\bar{\mu}} \epsilon'^{\bar{\nu}} \epsilon_{\alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta}} p^{\bar{\alpha}} \epsilon'^{\bar{\beta}*} \tag{4.42}$$

$$= -p^2 \left(g^{\Delta}_{\mu\beta} g^{\Delta}_{\nu\alpha} - g^{\Delta}_{\mu\alpha} g^{\Delta}_{\nu\beta}\right)$$

ifadesi kullanılarak 1^{-+} durumu için kütle ifadesi

$$\frac{(\lambda_1^{1-+})^2}{p^2 - m_{1-+}^2} = \frac{1}{12} \kappa^{(1-)}_{\mu\nu\alpha\beta} \Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{4.43}$$

olarak bulunur. Şekil 4.5'te $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta} \to 1^{-+}$ için kütle tayfı farklı s_0 ve M^2 değerleri için gösterilmektedir.



Şekil 4.5. $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 1^{-+} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ GeV^2$ ve $s_0 = 19\ GeV^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi

4.3.3. $j^{(0)}_{\mu\nu}$ ile yazılan ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik kısmı

Matris elemanı

$$\left\langle 0 \left| j^{(0)}_{\mu\nu} \right| 0^{++} \right\rangle = \lambda_0^{0++} g_{\mu\nu} \tag{4.44}$$

olmak üzere $j^{(0)}_{\mu\nu}$ için ilişkilendirme fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}
\Pi^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta} &= i \int d^4x\, e^{ipx} \left\langle 0 \left| T \left\{ j^{(0)}_{\mu\nu}(x) j^{(0)\dagger}_{\alpha\beta}(0) \right\} \right| 0 \right\rangle \\
&= \sum_h \frac{\left\langle 0 \left| j^{(0)}_{\mu\nu} \right| h(p) \right\rangle \left\langle h(p) \left| j^{(0)\dagger}_{\alpha\beta} \right| 0 \right\rangle}{p^2 - m_h^2} \\
&= \frac{\left\langle 0 \left| j^{(0)}_{\mu\nu} \right| 0^{++}(p) \right\rangle \left\langle 0^{++}(p) \left| j^{(0)\dagger}_{\alpha\beta} \right| 0 \right\rangle}{p^2 - m_{0++}^2} = \frac{(\lambda_0^{0++})^2}{p^2 - m_{0++}^2} g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

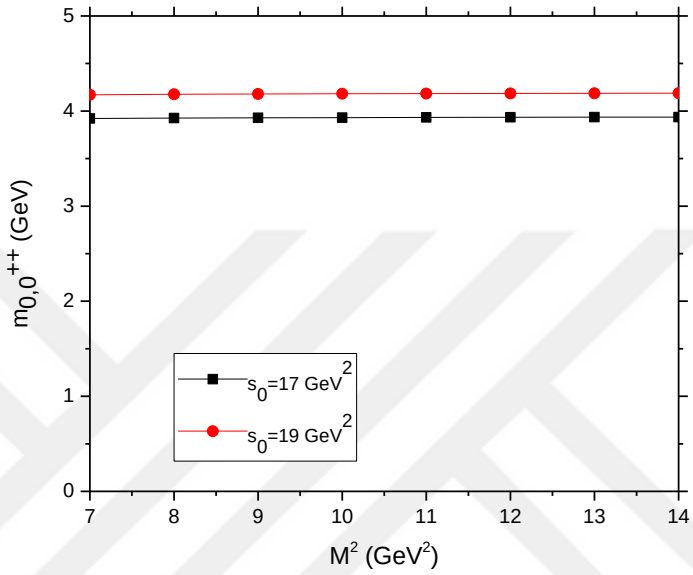
Bu durumda vakumdan sadece $J^{PC} = 0^{++}$ durumu yaratılabildiğinden ilişkilendirme fonksiyonunun başka bir bileşeni yoktur. Lorentz yapısı

$$\kappa^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \tag{4.46}$$

olup 0^{++} durumu için kütle

$$\frac{(\lambda_0^{0++})^2}{p^2 - m_{0++}^2} = \frac{1}{16}\kappa_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)}\Pi_{\mu\nu\alpha\beta}^{(0)} \tag{4.47}$$

olarak elde edilir. Şekil 4.6'da $\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \to 0^{++}$ için kütle tayfı farklı s_0 ve M^2 değerleri için gösterilmektedir.



Şekil 4.6. $\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)}$ ilişkilendirme fonksiyonunda elde edilen 0^{++} durumu için kütlenin $s_0 = 17\ GeV^2$ ve $s_0 = 19\ GeV^2$ değerlerinde Borel parametresine bağlı olarak değişimi

4.4. Toplam Kuralları Analizi

Toplam kurallarından elde edilen ifade s_o süreklilik eşiği ve M^2 Borel parametresi olmak üzere iki parametreye bağlıdır. s_o süreklilik eşiği parametresinin seçimi üzerine genel kabul görmüş bir yaklaşım mevcuttur: çalışılan hadron kütlesinden yaklaşık olarak 0,5 GeV yukarıda seçilir. Buna karşın Borel parametresinin seçimi biraz daha farklıdır. Hatta bu seçimi bir optimizasyon problemi olarak ele alanlar da vardır (Cohen vd, 1995).

Borel parametresinin seçimi kısmında da değinildiği gibi toplam kurallarında genellikle en düşük seviyeli durumun kütlesi hesaplanır. Bu durumda Borel parametresi olan M^2'nin ilgilenilen hadronun durumuna göre olabildiğince küçük

olmalıdır. Borel dönüşümü toplam kurallarının elde edileceği ifadedeki integrale $e^{-\frac{s}{M^2}}$ gibi bir çarpan getirir:

$$F(s_o, M^2) = \int_0^{s_0} \rho(s)\, e^{-\frac{s}{M^2}} ds. \qquad \textbf{(4.48)}$$

Bu eşitlikteki integrale esas katkı $s \cong M^2$ değerinde gelir. $s \geq M^2$ değerlerinde integrale katkı azalır, taban durumunun katkısı baskın olur. Büyük M^2 değerleri asimptotik özgürlüğün olduğu bölgedir ve bu bölgede hadronlaşmadan bahsedilemez. Bu nedenle kuark-hadron düalitesi yaklaşımı yapılamaz çünkü toplam kurallarına taban durumunun katkısı baskın değildir. Diğer yandan M^2 parametresi çok küçük değerleri alamaz. Aksi halde pertürbatif kısma gelen katkılar sonsuz olur. Bu veriler altında M^2 için uygun bir seçim şu şekilde yapılabilir: Taban seviyesinin katkısının baskın olduğu ve pertürbatif kısma gelen katkılardaki serilerin yakınsaklığının garantilendiği bir değer aralığı seçilmelidir.

Bu çalışmada elde edilen toplam kurallarının gösterimi şu şekilde yapılabilir:

$$SR(s_o, M^2) = \int_0^{s_0} \rho(s)\, e^{-\frac{s}{M^2}} ds. \qquad \textbf{(4.49)}$$

Tez kapsamında ilişkilendirme fonksiyonunun fenomenolojik tarafına pertürbatif ve dört boyutlu vakum kondensatlarından katkı gelmiştir. Bu katkılar şu şekilde gösterilebilir:

$$SR(s_o, M^2) = SR^{(0)}(s_o, M^2) + SR^{(4)}(s_o, M^2). \qquad \textbf{(4.50)}$$

Burada s_o süreklilik eşiği parametresidir ve $SR^{(0)}$ pertürbatif katkıyı, $SR^{(4)}$ ise dört boyutlu vakum kondensatından gelen katkıyı göstermektedir. İntegralin üst sınırındaki s_o parametresi toplam kurallarında yer alan yüksek seviyeli durumların katkısını baskılar. (4.50) nolu ifadenin genel hali

$$SR(s_0 = \infty, M^2) = SR^{(0)}(s_o, M^2) + y\ddot{u}ksek\ seviyeli\ durumlar \qquad \textbf{(4.51)}$$

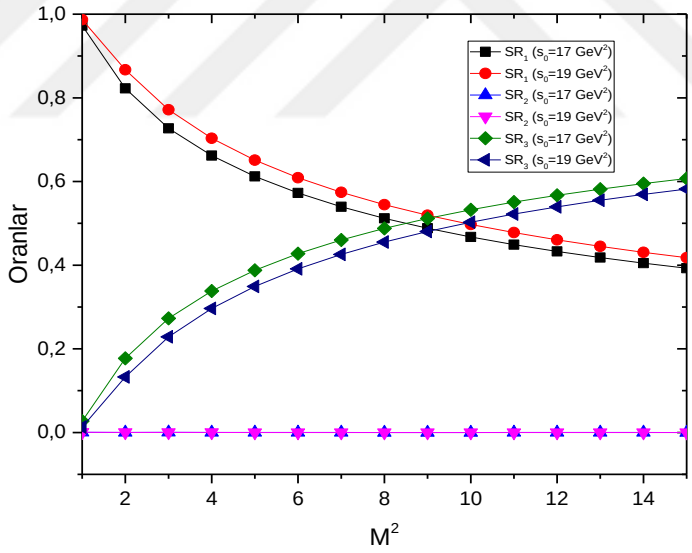
şeklindedir. Bu ifadelerden hareketle şu oranlar tanımlansın:

$$SR_1 = \frac{SR^{(0)}(s_o, M^2)}{SR(s_0 = \infty, M^2)} \tag{4.52a}$$

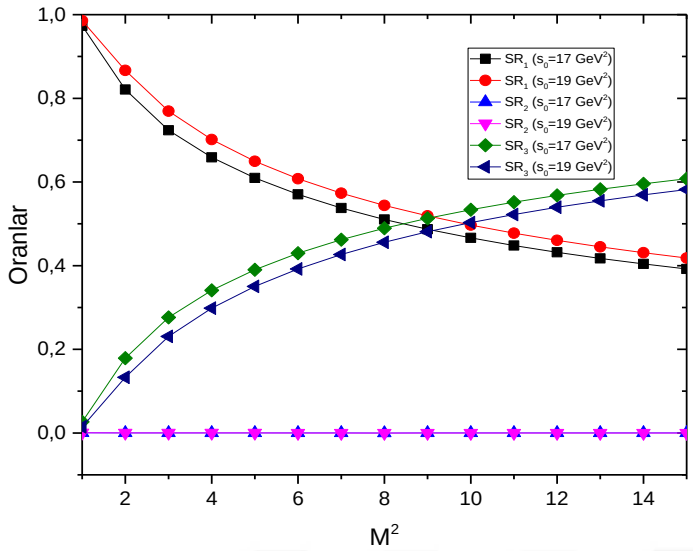
$$SR_2 = \frac{SR^{(4)}(s_o, M^2)}{SR^{(0)}(s_o, M^2)} \tag{4.52b}$$

$$SR_3 = \frac{SR(s_0 = \infty, M^2) - SR(s_o, M^2)}{SR(s_0 = \infty, M^2)}. \tag{4.52c}$$

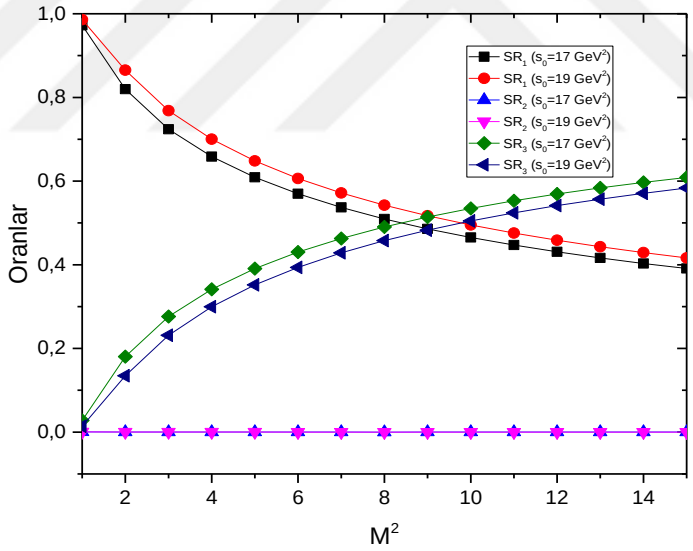
SR_1 oranı pertürbatif katkının tüm katkıya oranını, SR_2 oranı dört boyutlu vakum kondensatın pertürbatif katkıya oranını ve SR_3 oranı ise yüksek seviyeli durumların tüm durumlara oranını göstermektedir. (4.49) nolu ifadeden de görüleceği üzere $e^{-\frac{s}{M^2}}$ çarpanı artan M^2 değeri $s < M^2$ için 1'e yakınsar. Bunun olmadığı durumlarda integrandın s_0 süreklilik eşiği parametresi ile baskılandığı gözönüne alınırsa SR_1 ve SR_2 oranının artan M^2 değerlerine göre azalacağı, SR_3 oranının ise artan M^2 değerlerine göre artacağı tahmin edilebilir. Şekil 4.7-4.12'de bu oranların grafikleri gösterilmektedir.



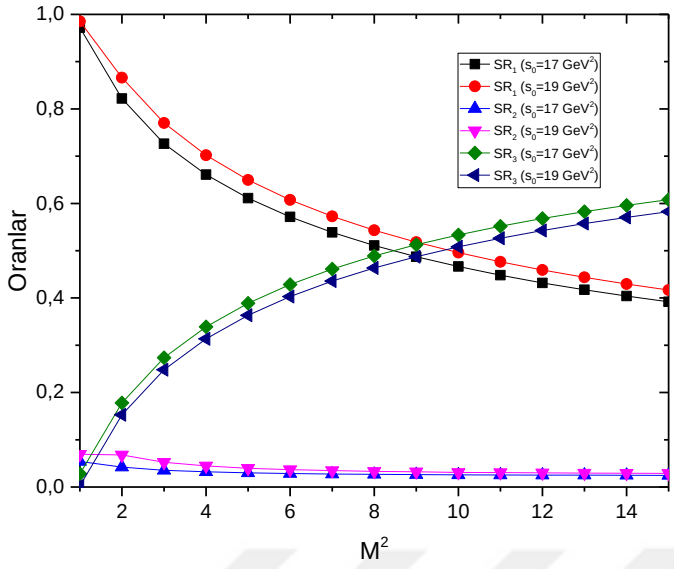
Şekil 4.7. $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 0^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi



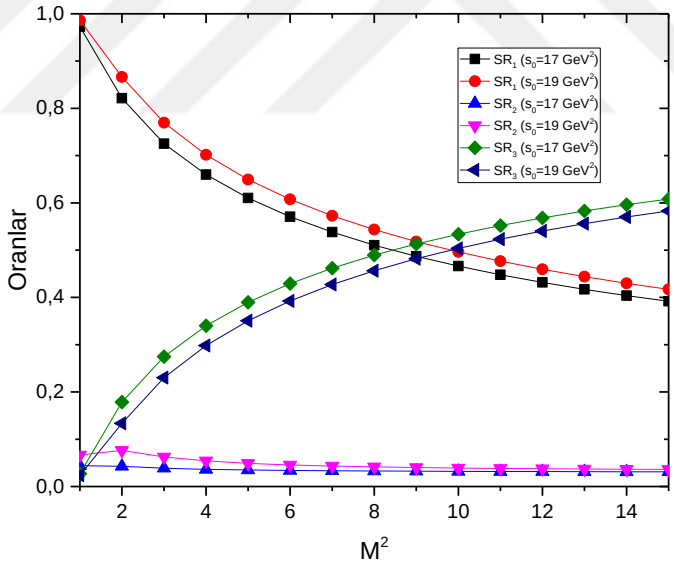
Şekil 4.8. $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 1^{-+}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi



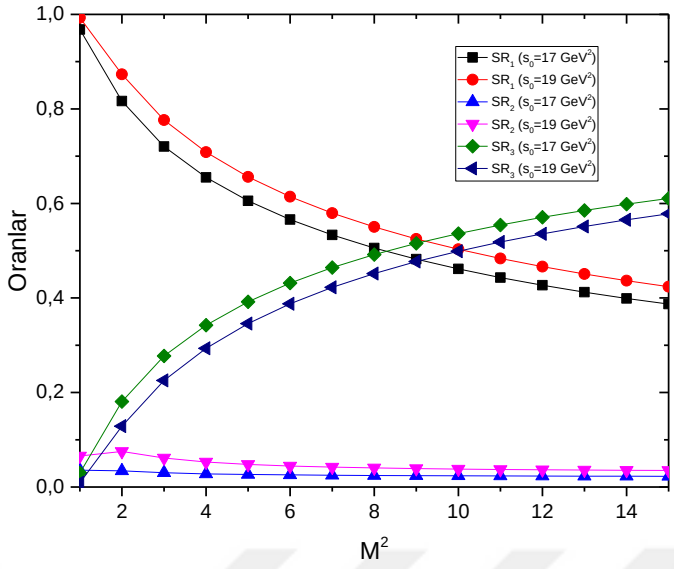
Şekil 4.9. $\Pi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 1^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi



Şekil 4.10. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 0^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi



Şekil 4.11. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 1^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi



Şekil 4.12. $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ilişkilendirme fonksiyonundan elde edilen $J^{PC} = 2^{++}$ durumu için oranların Borel parametresine göre değişimi

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında $X(3872)$ ve ağır kuark eşlerinin kütle tayfı KRDTK yöntemiyle elde edilmiştir. $\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$, $\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ve $\Pi^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ilişkilendirme fonksiyonlarına karşılık gelen kütle tayfının ortalama değeri $m = 4055 \pm 127\, MeV$ olup hata payı içerisinde $X(3872)$'nin deneysel kütlesiyle uyumludur.

$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$, $\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$ ve $\Pi^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta}$'dan elde edilen durumların kütleleri Çizelge 5.1'de gösterilmektedir. Hata payları iki farklı s_0 değerinden elde edilen kütle değerlerinin farkları alınarak elde edilmiştir.

Çizelge 5.1. $X(3872)$ eşleri için nümerik kütle değerleri

$Fenomenolojik\ Kısım$	J^{PC}	M_X
$\Pi^{(0)}_{\mu\nu\alpha\beta}$	0^{++}	$4055 \pm 126\, MeV$
$\Pi^{(1)}_{\mu\nu\alpha\beta}$	1^{-+}	$4056 \pm 126\, MeV$
	1^{++}	$4053 \pm 129\, MeV$
$\Pi^{(2)}_{\mu\nu\alpha\beta}$	0^{++}	$4058 \pm 124\, MeV$
	1^{++}	$4055 \pm 126\, MeV$
	2^{++}	$4053 \pm 129\, MeV$

Giriş kısmında bahsedilen AKSS altında aynı $S_{ağır}$ spin değerlerine sahip olan durumların dejenereliği yukarıdaki çizelgede görülmektedir. Kütleler arasındaki çok küçük farklılık $X(3872)\, J^{PC} = 1^{++}$ durumu için AKSS'nin öngördüğü üç eşin varlığını onaylamaktadır.

Toplam kurallarından elde edilen kütle ifadesi s_0 eşik enerjisi ve M^2 Borel parametresine bağlıdır. Bununla birlikte kütlenin fiziksel bir parametre olmayan Borel parametresine bağlı olmaması gerekir. Spin-2, spin-1 ve spin-0 ilişkilendirme fonksiyonlarından elde edilen kütle grafikleri $7\, GeV^2 < M^2 < 14\, GeV^2$ değerleri için çizgisel çıkmış olup Borel parametresine bağlı olmadığı görülmüştür. Ayrıca toplam kuralı analizine göre seçilen Borel parametre aralığı tutarlı sonuçlar vermiştir.

Matheus ve Nielsen (2009a) $X(3872)$ için KRDTK yöntemini uygulamış ve kütlesini $M_X = 3.94 \pm 0.17\, GeV$ olarak bulmuşlardır. Elde ettiğimiz sonuçlar bu çalışma ile uyumludur.

Guo vd, (2013) $X(3872)$'nin spin eşi olarak düşündükleri $J^{PC} = 2^{++}$ kuantum sayılı ve $D^*\overline{D}^*$ bağlı durumu olarak düşündükleri $X_2(4012)$ mezonunun e^+e^- çarpışmasında üretimi üzerine yaptıkları çalışmada enerji aralığının $4.4\,GeV - 4.5\,GeV$ olması durumunda $X(3872)$'nin spin eşinin gözlemlenebileceğini bulmuşlardır. Spin-2'den elde ettiğimiz 2^{++} durumunun kütlesi bu varsayımla uyumludur.

Nieves ve Valderrama (2012), pion değiş tokuşu olmaksızın kurdukları efektif alan teorisi ile tılsımlı mezon-karşıtmezon sistemlerini inceledikleri çalışmada $X(4012)$ olarak adlandırdıkları $J^{PC} = 2^{++}$ kuantum sayılı durumu $X(3872)$'nin ağır kuark spin simetrik eşi olarak teorize etmişlerdir. Buna ek olarak 0^{++} kuantum sayılı $X(3915)$'i, $X(3872)$'nin ağır kuark simetri eşi olarak aldıklarında 6 tane $D^*\overline{D}^*$ moleküler durumu tahmin etmişlerdir. Çizelge 5.2'de bu durumların sonuçları verilmektedir.

Çizelge 5.2. AKSS altında $X(3872)$ eşleri

J^{PC}	$E\ (\Lambda = 0.5\,GeV)$	$E\ (\Lambda = 1\,GeV)$	$Bu\ çalışma$
0^{++}	$3706 \pm 10\,MeV$	$3857^{+13}_{-17}\,MeV$	$4055\ \pm 126\,MeV$
1^{++}	$Girdi$	$Girdi$	$4056\ \pm 126\,MeV$
1^{+-}	$3814 \pm 17\,MeV$	$3819^{+24}_{-27}\,MeV$	$4053\ \pm 129\,MeV$
0^{++}	$Girdi$	$Girdi$	$4058\ \pm 124\,MeV$
1^{+-}	$3953 \pm 17\,MeV$	$3956^{+25}_{-28}\,MeV$	$4055\ \pm 126\,MeV$
2^{++}	$4012 \pm 3\,MeV$	$4012^{+4}_{-9}\,MeV$	$4053\ \pm 129\,MeV$

Bu tez kapsamında elde edilen sonuçlarla genel olarak uyumlu olan yukarıdaki sonuçlardan farklı olarak Nieves ve Valderrama'nın (2012) girdi olarak aldıkları durumların kütleleri çalışmamızda nümerik olarak elde edilmiştir.

Wang ve Huang (2014) $X(3872)$, $Z_c(3900)$ ve $Z_c(3885)$ mezonlarını KRDTK yöntemi dahilinde aksiyel vektör tetrakuark durumları olarak ele aldıkları çalışmalarında $X(3872)$'nin kütlesini $M_X = 3.87\,^{+0.09}_{-0.09}\,GeV$ ve $M_Z = 3.91\,^{+0.11}_{-0.09}\,GeV$ olarak elde etmişler ve bu sonuçların kuantum sayılarını sırasıyla 1^{++} ve 1^{-+} olduğuna işaret ettiğini belirtmişlerdir. $X(3872)$ için sonuçlarımız bu çalışma ile de uyumludur.

Bu tez çalışması kapsamında $X(3872)$'nin bir eşi olabilecek $X(3940)$ parçacığının kuantum sayıları için bir öngörüde bulunulmuştur. $X(3940)$'ın kuantum

sayılarını henüz belirlenememiştir, $J^{PC} = ?^{??}$. Elde ettiğimiz nümerik sonuçlar hata payı içerisinde bu durumun kütlesiyle uyumlu olup yük eşleniğinin pozitif olması öngörülmektedir. Benzer bir şekilde $X(3872)$'nin bir diğer eşi olabilecek $X(3915)$'in kuantum sayıları $J^{PC} = 0\ veya\ 2^{++}$'dır. Sonuçlarımızdan $\Pi^{(2)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$'dan elde edilen 0^{++} ve 2^{++} durumlarının ve $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\delta}$'dan elde edilen 0^{++} durumlarının kütleleri $X(3915)$ ile uyumludur.

Bu tez kapsamında $X(3872)$'nin olası eşleri moleküler gösterimde KRDTK yöntemiyle çalışılmış ve literatürle uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. AKSS'nin $X(3872)$ için öngördüğü olası eşler KRDTK yöntemiyle elde edilmiştir. Kullanılan akım neticesinde yüksek boyutlu katkılar ve kuark kondensatlar katkı vermemiş olup hafif kuark ilerleticisinde $m_q \to 0$ limiti kullanılmıştır. Ayrıca yük eşlenik sayısı $C = +1$ olacak şekilde akım seçilmiştir. $C = -1$ olacak şekilde başka bir akım seçilip ortaya çıkabilecek olan dejerenerlik çalışabilir. Kütle hesabından farklı olarak kütle farklarının doğrudan elde etmek için yöntemler denenebilir. Farklı akım ve limitle birlikte geleneksel olmayan mezonların tasviri için farklı bir gösterim kullanılıp KRDTK yöntemiyle sonuçlar incelenebilir.

KAYNAKLAR

Aaij, R., Adeva, B., Adinolfi M., Affolder, A., Ajaltouni, Z., Albrecht, J., . . . Zvyagin, A., (2014). Evidence for the decay X(3872) -> psi(2S)gamma. *Nuclear Physics B,* 886: 665-680. doi:10.1016/j.nuclphysb.2014.06.011

Aaij, R., Beteta C. A., Adeva, B., Adinolfi, M., Adrover, C., Affolder, A., . . . Collaboration L., (2013a). Determination of the X(3872) Meson Quantum Numbers. *Physical Review Letters,* 110(22). doi:10.1103/PhysRevLett.110.222001

Aaij, R., Beteta, C. A., Adeva, B., Adinolfi, M., Adrover, C., Affolder, A., . . . Zvyagin, A. (2013b). Precision measurement of D meson mass differences. *Journal of High Energy Physics*(6). doi:10.1007/Jhep06(2013)065

Aaij, R., Beteta, C. A., Adeva, B., Adinolfi, M., Adrover, C., Affolder, A., . . . Collaboration L (2012). Observation of X(3872) production in pp collisions at root s=7 TeV. *European Physical Journal C,* 72(5). doi:10.1140/epjc/s10052-012-1972-7

Abazov, V. M., Abbott, B., Abolins, M., Acharya, B. S., Adams, D. L., Adams, M., . . . Collaboration D (2004). Observation and properties of the X(3872) decaying to J/psi pi(+)pi(-) in p(p)over-bar collisions at root s=1.96 TeV. *Physical Review Letters,* 93(16). doi:10.1103/PhysRevLett.93.162002

Ablikim, M., Achasov, M. N., Ai, X. C., Albayrak, O., Ambrose, D. J., An, F. F., . . . Collaboration B (2013). Observation of a Charged Charmoniumlike Structure in e(+)e(-) -> pi(+)pi(-) J/psi at root s=4.26 GeV. *Physical Review Letters,* 110(25). doi:10.1103/PhysRevLett.110.252001

Abulencia, A., Adelman, J., Affolder, T., Akimoto, T., Albrow, M. G., Ambrose, D., . . . Collaboration C (2007). Analysis of the quantum numbers J(PC) of the x(3872) particle. *Physical Review Letters,* 98(13). doi:10.1103/PhysRevLett.98.132002

Acosta, D., Affolder, T., Ahn, M. H., Akimoto, T., Albrow, M. G., Ambrose, D., . . . Collaboration C I (2004). Observation of the narrow state X(3872)-> J/psi pi(+)pi(-) in (p)over-barp collisions at root s=1.96 TeV. *Physical Review Letters,* 93(7). doi:10.1103/PhysRevLett.93.072001

Aubert B., Barate, R., Boutigny, D,, Couderc, F., Gaillard, J. M., Hicheur, A,, . . . Collaboration B (2005). Study of the B- -> J/psi K-pi(+)pi(-) decay and measurement of the B- -> X(3872)K- branching fraction. *Physical Review D,* 71(7). doi:10.1103/PhysRevD.71.071103

Aubert, B., Barate, R., Bona, M., Boutigny, D., Couderc, F., Karyotakis, Y., . . . Collaboration B (2006). Search for B+-> X(3872)K+, X(3872)-> J/psi gamma. *Physical Review D,* 74(7). doi:10.1103/PhysRevD.74.071101

Aushev, T., Zwahlen, N., Adachi, I., Aihara, H., Bakich, A. M., Balagura, V., . . . Collaboration B (2010). Study of the B -> X(3872)(-> D*(0)(D)over-bar(0)K decay. *Physical Review D,* 81(3). doi:10.1103/PhysRevD.81.031103

Aydemir, U. (2007). Strong Decays of the $D_{SJ}(2317)$ Mesons Using QCD Sum Rules. Yüksek Lisans Tezi (basılmamış), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, 28, Ankara

Barnes, T., Godfrey, S. and Swanson, E. S. (2005). Higher charmonia. *Physical Review D,* 72(5). doi:10.1103/PhysRevD.72.054026

Baru, V., Epelbaum, E., Filin, A. A., Hanhart, C., Meissner, U. G. and Nefediev, A. V. (2015). Heavy-quark spin symmetry partners of X(3872) revisited. *Physics Letters B,* 763:20-28. doi: 10.1016/j.physletb.2016.10.008

Baru, V., Hanhart, C. and Nefediev, A. V. (2017). Can X(3915) be the tensor partner of X(3872)? *Journal of High Energy Physics,* 6, 10. doi: 10.1007/JHEP06(2017)010

Bhardwaj, V., Trabelsi, K., Singh, J. B., Choi, S. K., Olsen, S. L., Adachi, I., . . . Collaboration B (2011). Observation of X(3872) -> J/psi gamma and Search for X(3872) -> psi 'gamma in B Decays. *Physical Review Letters,* 107(9). doi:10.1103/PhysRevLett.107.091803

Bondar, A., Garmash, A., Mizuk, R., Santel, D., Kinoshita, K., Adachi, I., . . . Zyukova, O. (2012). Observation of Two Charged Bottomoniumlike Resonances in Y(5S) Decays. *Physical Review Letters,* 108(12). doi:10.1103/PhysRevLett.108.122001

Brown, J. W. and Churchill, R. V. 2014. *Complex Variables and Applications.* Mc Graw Hill Education.

Buell, W. F. and Shadwick, B. A. (1995). Potentials and Bound-States. *American Journal of Physics,* 63(3): 256-258. doi:10.1119/1.17935

Chen, W., Jin, H., Kleiv, R. T., Steele, T. G.,Wang, M., Xu, Q. (2013). QCD sum-rule interpretation of X(3872) with $J^{PC} = 1^{++}$ mixtures of hybrid charmonium and $\bar{D}D^{*}$ molecular currents. *Physical Review D, 88(5),* doi: 10.1103/PhysRevD.88.045027

Choi, S. K., Olsen, S. L., Abe, K., Abe, T., Adachi, I., Ahn, B. S., . . . Collaboration B (2003). Observation of a narrow charmoniumlike state in exclusive B-+/--> K-+/-pi(+)pi(-)J/psi decays. *Physical Review Letters,* 91(26). doi:10.1103/PhysRevLett.91.262001

Choi, S. K., Olsen, S. L., Trabelsi, K., Adachi, I., Aihara, H., Arinstein, K., . . . Collaboration B (2011). Bounds on the width, mass difference and other properties of X(3872) -> pi(+)pi(-) J/psi decays. *Physical Review D,* 84(5). doi:10.1103/PhysRevD.84.052004

Cincioğlu, E. (2016). Mezon Moleküllerine Kuarkonyum Katkısı. Doktora Tezi (basılmamış), Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı, 96, Ankara

Cohen, T. D., Furnstahl, R. J., Griegel, D. K. and Jin, X. M. (1995). QCD sum rules and applications to nuclear physics. *Progress in Particle and Nuclear Physics, Vol 35,* 35: 221-298. doi:10.1016/0146-6410(95)00043-I

Coito, S., Rupp, G., van Beveren, E. (2013). X(3872) is not a treu molecule. *European Physical Journal C* 73(3). doi: 10.1140/epjc/s10052-013-2351-8.

Colangelo, P. and Khodjamirian, A. (2000). QCD Sum Rules: A Modern Perspective, arXiv: hep-ph/0010175v1

Dubynskiy, S. and Voloshin, M. B. (2008). Hadro-charmonium. *Physics Letters B,* 666(4): 344-346. doi:10.1016/j.physletb.2008.07.086

Faccini, R., Pilloni, A. and Polosa, A. D. (2012). Exotic Heavy Quarkonium Spectroscopy: A Mini-Review. *Modern Physics Letters A,* 27(29). doi:10.1142/S021773231230025x

Fleming, S., Kusunoki, M., Mehen, T. and van Kolck, U. (2007). Pion interactions in the X(3872). *Physical Review D,* 76(3). doi:10.1103/PhysRevD.76.034006

Gamermann, D., Nieves, J., Oset, E. and Arriola, E. R. (2010). Couplings in coupled channels versus wave functions: Application to the X(3872) resonance. *Physical Review D,* 81(1). doi:10.1103/PhysRevD.81.014029

Gamermann, D. and Oset, E. (2009). Isospin breaking effects in the X(3872) resonance. *Physical Review D,* 80(1). doi:10.1103/PhysRevD.80.014003

Gasiorowicz, S. and Rosner, J. L. (1981). Hadron Spectra and Quarks. *American Journal of Physics,* 49(10): 954-984. doi:10.1119/1.12597

Godfrey, S. and Isgur, N. (1985). Mesons in a Relativized Quark-Model with Chromodynamics. *Physical Review D,* 32(1): 189-231. doi:10.1103/PhysRevD.32.189

Griffiths, D. 2008. *Introduction to Elementary Particles*. WILEY-VCH, KGaA Weinheim

Guo, F. K., Hanhart, C., Meissner, U. G., Wang, Q. and Zhao, Q. (2013). Production of the X(3872) in charmonia radiative decays. *Physics Letters B,* 725(1-3): 127-133. doi:10.1016/j.physletb.2013.06.053

Guo, F. K., Hanhart, C., Kalashnikova, Yu. S., Meissner, U. G., Nefediev, A. V. (2015). What can radiative devays of X(3872) teach us about it nature? *Physics Letters B,* 742:394-398. doi: 10.1016/j.physletb.2015.02.013

Halzen, F. and Martin, A. D. 1984. *Quarks and Leptons An introductory Course in Modern Particle Physics,* John Wiley & Sons

Hanhart, C. 2014. *Physics with Heavy Quarks: Hunting for Exotic States,* Hadron Physics Summer School, Schloss Rauischholzhausen, University of Gießen

Hidalgo-Duque, C., Nieves, J., Ozpineci, A. and Zamiralov, V. (2013). X (3872) and its partners in the heavy quark limit of QCD. *Physics Letters B,* 727(4-5): 432-437. doi:10.1016/j.physletb.2013.10.056

Hogaasen, H., Richard, J. M. and Sorba, P. (2006). Chromomagnetic mechanism for the X(3872) resonance. *Physical Review D,* 73(5). doi:10.1103/PhysRevD.73.054013

Ioffe, B. L. (1981). Calculation of Baryon Masses in Quantum Chromodynamics. *Nuclear Physics B,* 188(2): 317-341. doi:10.1016/0550-3213(81)90259-5

Julia-Diaz, B. and Riska, D. O. (2004). Baryon magnetic moments in relativistic quark models. *Nuclear Physics A,* 739(1-2): 69-88. doi:10.1016/j.nuclphysa.2004.03.078

Lancaster, T. and Blundell, S. J. 2014. *Quantum Field theory for the Gifted Amateur,* Oxford University Press.

Lee, I. W., Faessler, A., Gutsche, T. and Lyubovitskij, V. E. (2009). X(3872) as a molecular DD* state in a potential model. *Physical Review D,* 80(9). doi:10.1103/PhysRevD.80.094005

Li, B. A. (2005). Is X(3872) a possible candidate as a hybrid meson? *Physics Letters B,* 605(3-4): 306-310. doi:10.1016/j.physletb.2004.11.062

Maiani, L., Piccinini, F., Polosa, A. D. and Riquer, V. (2005). Diquark-antidiquark states with hidden or open charm and the nature of X(3872). *Physical Review D,* 71(1). doi:10.1103/PhysRevD.71.014028

Matheus, R. D., Nielsen, M. (2007). X(3872) as Tetraquarks in QCD Sum Rules. *International Journal of Modern Physics E,* 16(9):2906-2909. doi: 10.1142/S0218301307008690

Matheus, R. D., Navarra, F. S., Nielsen, M. and Zanetti, C. M. (2009a). QCD sum rules for the X(3872) as a mixed molecule-charmonium state. *Physical Review D,* 80(5). doi:10.1103/PhysRevD.80.056002

Matheus, R. D., Navarra, F. S., Nielsen, M. and Zanetti, C. M. (2009b). Understanding the X(3872) with QCD sum rules. *19th International Iupap Conference on Few-Body Problems in Physics,* 3. doi:10.1051/epjconf/20100303025

Mutuk, H. and Gümüş, H. (2016). SVZ Sum Rules in Quantum Mechanics. *Journal of Phsyics: Conference Series (*766) 012005 doi:10.1088/1742-6596/766/1/012005

Navarra, F. S., Nielsen, M. (2006). $X(3872) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ and $X(3872) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0$ decay widths from QCD Sum Rules. *Physics Letters B,* 639, 272-277.

Nieves, J. and Valderrama, M. P. (2012). Heavy quark spin symmetry partners of the X(3872). *Physical Review D,* 86(5). doi:10.1103/PhysRevD.86.056004

Novak,.I. and Olejnik, S. (1985). Bound-State Perturbation Method Via Svz Sum-Rules in Quantum-Mechanics. *Czechoslovak Journal of Physics,* 35(10): 1067-1083. doi:10.1007/Bf01596425

Ochs, W. (2013). The status of glueballs. *Journal of Physics G-Nuclear and Particle Physics,* 40(4). doi:10.1088/0954-3899/40/4/043001

Özpineci, A. (2014). X(3872) in Heavy Quark Limit of QCD: Its Partners and Isospin Structure. *Qcd@Work 2014 - International Workshop on Quantum Chromodynamics Theory and Experiment,* 80. doi:10.1051/epjconf/20148000005

Pascual, P. and Tarrach, R. (1984). *QCD: Renormalization for the Practitioner,* Springer-Verlag, New York

Reinders, L. J., Rubinstein, H. and Yazaki, S. (1985). Hadron Properties from Qcd Sum-Rules. *Physics Reports-Review Section of Physics Letters,* 127(1): 1-97. doi:10.1016/0370-1573(85)90065-1

Sanchez, P. D., Lees, J. P., Poireau, V., Prencipe, E., Tisserand, V., Tico, J. G., . . . Wu, S. L. (2010). Evidence for the decay X(3872) -> J/psi omega. *Physical Review D,* 82(1). doi:10.1103/PhysRevD.82.011101

Seth, K. K. (2005). An alternative interpretation of X(3872). *Physics Letters B,* 612(1-2): 1-4. doi:10.1016/j.physletb.2005.02.057

Shifman, M. A., Vainsthein, A. I. and Zakharov, V. I. (1979). QCD and Resonance Physics. *Nuclear Physics B,* 147:447-518. doi: 10.1016/0550-3213(79)90022-1

Suzuki, M. (2005). X(3872) boson: Molecule or charmonium. *Physical Review D,* 72(11). doi:10.1103/PhysRevD.72.114013

Swanson, E. S. (2004). Short range structure in the X(3872). *Physics Letters B,* 588(3-4): 189-195. doi:10.1016/j.physletb.2004.03.033

Takeuchi, S., Shimizu, K. and Takizawa, M. (2014). On the origin of the narrow peak and the isospin symmetry breaking of the X(3872). *Progress of Theoretical and Experimental Physics*(12). doi:10.1093/ptep/ptu160

Takizawa, M. and Takeuchi, S. (2013). X(3872) as a hybrid state of charmonium and the hadronic molecule. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*(9). doi:10.1093/ptep/ptt063

Tomonaga, S. (1946). On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*(1), 27-42. doi:10.1143/PTP.1.27.

Törnqvist, N. A. (2004). Isospin breaking of the narrow charmonium state of Belle at 3872 MeV as a deuson. *Physics Letters B,* 590(3-4): 209-215. doi:10.1016/j.physletb.2004.03.077

Uehara, S., Aushev, T., Bakich, A. M., Belous, K., Bhardwaj, V., Bischofberger, M., . . . Zyukova, O. (2010). Observation of a Charmoniumlike Enhancement in

the gamma gamma ->omega J/psi Process. *Physical Review Letters*, 104(9). doi:10.1103/PhysRevLett.104.092001

Valderrama, M. P. (2012). Power counting and perturbative one pion exchange in heavy meson molecules. *Physical Review D*, 85(11). doi:10.1103/PhysRevD.85.114037

Wang, Z. G. and Huang, T. (2014). Analysis of the X(3872), Z(c()3900), and Z(c()3885) as axial-vector tetraquark states with QCD sum rules. *Physical Review D*, 89(5). doi:10.1103/PhysRevD.89.054019

Zhou, Z. Y., Xiao, Z. G. and Zhou, H. Q. (2015). Could the X(3915) and the X(3930) Be the Same Tensor State? *Physical Review Letters*, 115(2). doi:10.1103/PhysRevLett.115.022001

EKLER

EK 1

(İlişkilendirme fonksiyonunun hadronik kısmından oluşan momentum ve metriğe bağlı yapılar)

Yapılar

$str1$	$q_\alpha q_\beta q_\delta q_\gamma$
$str2$	$q_\delta q_\gamma g_{\alpha\beta}$
$str3$	$q_\beta q_\gamma g_{\alpha\delta}$
$str4$	$q_\beta q_\delta g_{\alpha\gamma}$
$str5$	$q_\alpha q_\gamma g_{\beta\delta}$
$str6$	$g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}$
$str7$	$q_\alpha q_\delta g_{\beta\gamma}$
$str8$	$g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}$
$str9$	$q_\alpha q_\beta g_{\delta\gamma}$
$str10$	$g_{\alpha\beta} g_{\delta\gamma}$

EK 2

(İlişkilendirme Fonksiyonunun Fenomenolojik Kısım Analitik İfadesi)

$$\rho_1^{pert} = \frac{-9}{\pi^{10}2^9}\int_0^1\int_0^{1-x} dydx\frac{(1-x-y)^{-2}}{x+y}$$
$$\times \{g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}[\frac{-\pi^4(-L)^4}{C^{-2}4!} - \frac{\pi^4(-L)^4}{C^{-1}4!}(\frac{-3y^2}{(x+y)^2} + \frac{2y}{x+y})$$
$$- \frac{\pi^4(-L)^3}{C^{-1}3!}q^2(\frac{y}{x+y}(C_1+C_3) - \frac{y^2}{(x+y)^2}C_2 + \frac{m_c^2}{q^2})]$$
$$+ q_\alpha q_\delta g_{\beta\delta}[\frac{\pi^4(-L)^3}{C^{-1}3!}(\frac{-2y^2}{(x+y)^2}C_2 + \frac{2y}{x+y}C_1)]\}\theta(L)$$

$$\rho_2^{pert} = \frac{-9}{6\pi^{10}2^9}\int_0^1\int_0^{1-x} dydx(1-x-y)^{-3}(-i\frac{\partial}{\partial q_\beta})(-i\frac{\partial}{\partial q_\gamma})$$
$$\times \{g_{\alpha\delta}[\frac{2\pi^4(-L)^5}{C^{-3}5!}(\frac{y^2}{(x+y)^2} - \frac{y}{x+y})$$
$$- \frac{2\pi^4(-L)^4}{C^{-2}4!}q^2(\frac{y}{x+y}(C_1+C_3) - \frac{y^2}{(x+y)^2}C_2 + \frac{m_c^2}{q^2})$$
$$- \frac{4\pi^4(-L)^5}{C^{-3}5!}]$$
$$+ q_\alpha q_\delta[\frac{4\pi^4(-L)^4}{C^{-2}4!}(\frac{y}{x+y}(C_1-C_3) - \frac{y^2}{(x+y)^2}C_2 + \frac{m_c^2}{q^2})]\}\theta(L)$$

$$\rho_1^{(4)} = \frac{\langle g^2G^2\rangle m_c^2}{6\pi^8 2^{10}}\int_0^1\int_0^{1-x} dydx\frac{x^3+y^3}{(1-x-y)^3(x+y)^3}$$
$$\times (-i\frac{\partial}{\partial q_\beta})(-i\frac{\partial}{\partial q_\gamma})$$
$$\times \{g_{\alpha\delta}[-\frac{\pi^4(-L)^2}{2} + \frac{5\pi^4(-L)^2}{4C}C_5 + \frac{\pi^4(-L)}{C}q^2C_2C_5]$$
$$+ q_\alpha q_\delta[(\frac{-2y}{x+y}(C_1+C_3) + \frac{2y^2}{(x+y)^2}C_2]\}\theta(L)$$

$$\rho_2^{(4)} = \frac{\langle g^2G^2\rangle m_c^2}{6\pi^8 2^{10}}\int_0^1\int_0^{1-x} dydx\frac{x^3+y^3}{(1-x-y)^3(x+y)^3}$$
$$\times \{g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}[\frac{\pi^4(-L)}{C} - \frac{\pi^4}{C^2}q^2C_5C_2 - \frac{5\pi^4(-L)}{2C^2}C_5]$$
$$+ q_\alpha q_\delta g_{\beta\delta}[\frac{\pi^4}{C^2}(\frac{2y}{x+y}(C_1+C_3) + \frac{2y^2}{(x+y)^2}C_2)]\}.$$

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m_c^2}{C} + q^2 \\
&\times \left(\frac{y^2}{C(x+y)^2} - \frac{y}{C(x+y)} - \frac{x^2y^2}{(x(x+y-1)+(y-1)y)^2} \right) \\
C &= \frac{x(x+y-1)+(y-1)y}{(x+y)^2} \\
C_1 &= \frac{xy}{-x(-x-y+1)-(1-y)y} + 1 \\
C_2 &= \frac{x^2y^2}{(-x(-x-y+1)-(1-y)y)^2} \\
&+ \frac{2xy}{-x(-x-y+1)-(1-y)y} + 1 \\
C_3 &= \frac{x^2y^2}{(-x(-x-y+1)-(1-y)y)^2} \\
&+ \frac{xy}{-x(-x-y+1)-(1-y)y} \\
C_4 &= \frac{2y^2}{(x+y)^2} - \frac{2y}{x+y} \\
C_5 &= 1 - \frac{y}{x+y}
\end{aligned}
$$

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	: Halil MUTUK
Doğum Yeri	: Bafra
Doğum Tarihi	: 29.10.1984
Yabancı Dili	: İngilizce (KPDS: 90, 2012; IELT:6.5, 2013)

Eğitim Durumu

Lise	: Bafra Anadolu Lisesi (2002)
Lisans	: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fizik Öğretmenliği Bölümü (2009)
Lisans	: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2016)
Yüksek Lisans	: Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı (Şubat 2009 - Ocak 2012)

Çalıştığı Kurumlar

Araştırma Görevlisi	: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı (Nisan 2009 – Şubat 2018)

Yayınlar

Mutuk H and Gümüş H (2016). SVZ Sum Rules in Quantum Mechanics. *Journal of Phsyics: Conference Series (*766) 012005 doi:10.1088/1742-6596/766/1/012005