



**Renyi/Augustin Bilgi Ölçüleri Ve Küre Sıkıştırma Sınırı İçin
Augustin Yöntemi**

Program Kodu:3501

Proje No:119E053

Proje Yürütücüsü:

Dr. Öğr. Üyesi BARIŞ NAKİBOĞLU

**ŞUBAT 2022
ANKARA**



TÜBİTAK

Renyi/Augustin Bilgi Ölçüleri ve Küre Sıkıştırma Sınırı için Augustin Yöntemi

PROJE SONUÇ RAPORU

Program Kodu: 3501

Proje No: 119E053

**Proje Yürütücüsü:
Dr. Barış NAKİBOĞLU**

**ŞUBAT 2022
ANKARA**

ÖNSÖZ

Augustin bilgi ölçülerinin kanal kodlarının optimum performansını karakterize etmedeki rolleri, ve bazı sönümlü kanallarda ve bir takım soyut modellerde karakterize edilmeleri ile ilgili problemlerin incelendiği bu proje TÜBİTAK tarafından desteklenmiştir.

Barış Nakiboğlu

Ankara, Şubat 2022

İçindekiler

ÖNSÖZ	i
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1 GİRİŞ	1
2 LİTERATÜR ÖZETİ	3
3 GEREÇ VE YÖNTEM	6
3.1 Augustin Bilgi Ölçüleri ve Exponent Fonksiyonları	6
3.1.1 Renyi Divergence	6
3.1.2 Augustin Bilgisi, Ortlaması, Kapasitesi, ve Merkezi	7
3.1.3 Exponent Fonksiyonları	8
3.2 Hypothesis testing ve eğik olasılık dağılımları/kanallar	9
3.2.1 Eğik olasılık dağılımları	9
3.2.2 Hypothesis testing ve eğik olasılık dağılımları	10
3.2.3 Eğik Kanallar	10
3.3 Hızlı Sönümlü Kanallar	11
3.4 Banach–Sach Özelliği ve Quasi-Convexity: Tıkızlığa bir alternatif	13
4 BULGULAR	15
4.1 Rafine Küre Sıkıştırma Sınırı	15
4.2 Rafine Strong Converse Sınırı	16
4.3 Hızlı Sönümlü Kanallarda KSS ve Eğik Kanalin Çarpanlarına Ayrılabilmesi	16
4.4 Augustin Ortalaması ve Augustin Operatörü	19
5 SONUÇ	20

Şekiller

1	Geçis olasılığı (crossover probabilitysi) $\delta = 0.11$ olan Binary simetrik kanalda (BSC) $P_e = 10^{-6}$ hata olasılığı ile ulaşılabilir hızla dair sınırlar ve farklı metodlar ile öngörülen değerler.	2
2	Crossover olasılığı 0.1 olan BSC ile $g(0) = 0.531$ ve $g(0.5) = 0.469$ olan FBSC'nin KSSleri.	18
3	Crossover olasılığı 0.1 olan BSC ile aynı kanal kapasitesine ($C = 0.368$) ve sadece iki farklı h değerine sahip FBSClerin $R = 0.131$ daki KSSlerinin BSC'nin aynı hızdaki KSSsine oranı.	18

Tablolar

ÖZET

Augustin bilgi ölçüleri ve bunların kanal kodlaması problemindeki optimal performansı karakterize etmekte kullanımı dört problem üzerinden incelenmiştir.

Memoryless kanallarda constant composition kodlar için kodun empirik dağılımının mutual informationı kodun hızından yüksek olduğu durumlarda rafine küre sıkıştırma sınır ispatlanmıştır. İspat farklı codeswordlere karşılık gelen output dağılımları ile Augustin ortalamasının çarpımı ile elde edilen output dağılımı arasındaki hypothesis testing problemi için eğiklik parametresinin kodun haberleşme hızı tarafından belirlenen bir değerinde Berry-Esseen teoreminin kullanılması fikrine dayanmaktadır. Yöntemde küçük değişiklikler yaparak rafine küre sıkıştırma sınırı Renyi-simetrik kanallar ve Gauss kanalları için de ispatlanmıştır.

Memoryless kanallarda constant composition kodlar için kodun empirik dağılımının mutual informationı kodun hızından düşük olduğu durumlarda daha önce bilinen tüm sonuçları iyileştiren bir rafine strong converse sınırı ispatlanmıştır. Küçük değişikliklerle rafine strong converse sınırı Renyi-simetrik kanallarda ve Gauss kanallarda da ispatlanabilmektedir.

Alıcıda kanal durum bilgisi olan hızlı sönümlü kanallar için sönümlü kanalın eğik kanalının eğik bir kanal durum dağılımı ile verili bir kanal durumunun eğik kanalının çarpımı olarak ifade edilebilmesi için gerekli ve yeterli olan bir koşul belirlendi.

Input dağılımı ve kanal ile ilgili sıkça kullanılan tüm continuous modellerce sağlanan hipotezler altında Augustin ortalamasının varlığı ve tekliği kanıtlandı, Augustin ortalaması Augustin operatorünün sabit nokta olarak karakterize edildi.

Anahtar kelimeler: Augustin bilgisi, Augustin ortalaması, Augustin kapasitesi, Augustin merkezi, küre sıkıştırma sınırı, sphere packing üssü, strong converse sınırı, strong converse üssü, error exponent, bilgi ölçüleri, bit hata oranı, hata düzelten kodlar.

ABSTRACT

Augustin information measures and their use in characterizing the performance of optimal performance in channel coding problem is investigated through four problems.

For constant composition codes on stationary memoryless channels with a rate less than the mutual information of corresponding to the composition of the codes a refined sphere packing bound is derived. Derivation employs the Berry-Esseen theorem in the hypothesis testing problem between the output distribution corresponding to different codeswords and the product distribution corresponding to the Augustin mean, at a tilting parameter value determined by the rate of the code. With minor modifications refined sphere packing bounds are derived for codes on Renyi-symmetric channels and Gaussian channels.

For constant composition codes on stationary memoryless channels with a rate greater than the mutual information of corresponding to the composition of the codes a refined strong converse bound is derived, which improves up on all the previously known results. With minor modifications refined strong converse bounds can be derived for codes on Renyi-symmetric channels and Gaussian channels.

For fast fading channels with channel state information at the receiver a necessary and sufficient condition is determined for the tilted channel of the fading channel be the product of a tilted distribution of the channel state and the tilted channel corresponding to the given channel state.

The existence of a unique Augustin mean is proved and it is characterized as fixed point of the Augustin operator under rather mild hypothesis on input measures and channels that are satisfied by all of the commonly used continuous models.

Keywords: Augustin information, Augustin mean, Augustin capacity, Augustin center, sphere packing bound, sphere packing exponent, strong converse bound, strong converse exponent, error exponent, information measures, bit error rate, error correcting codes.

1 GİRİŞ

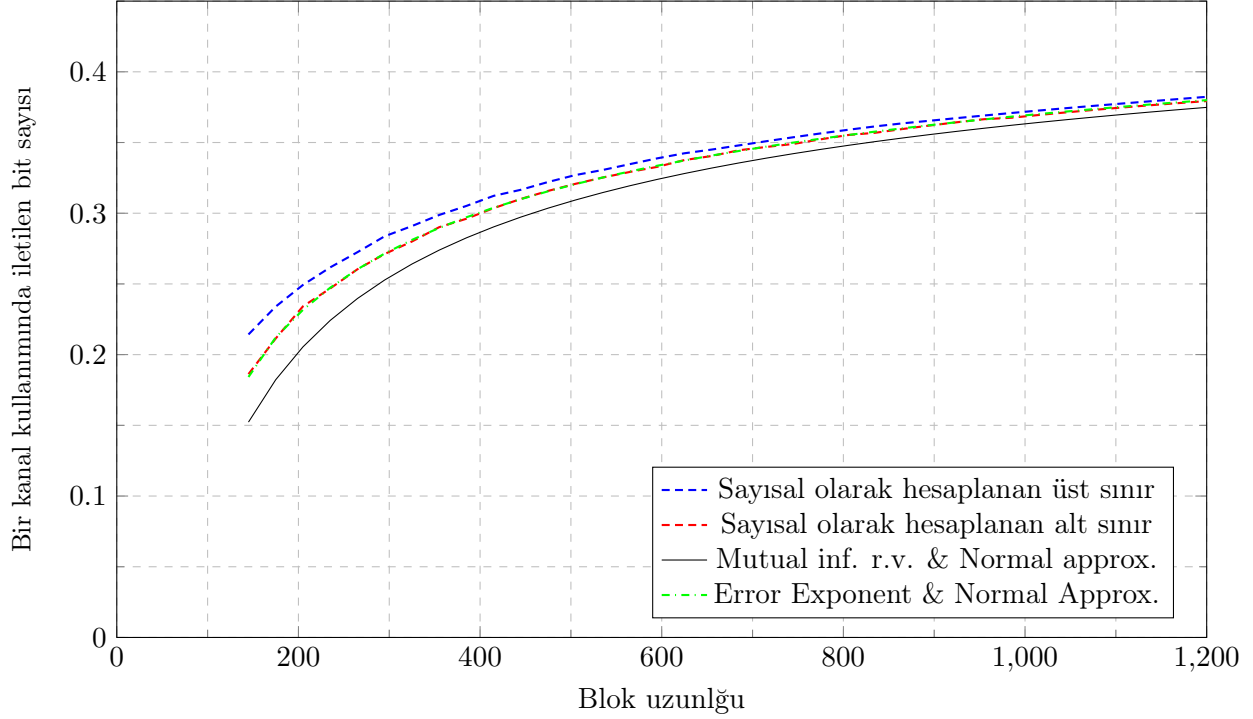
Sayısal haberleşme problemi ile ilgili en temel iki kavram her hangi bir kaynağın entropisi ve bu kaynağın iletileceği kanalın kapasitesidir. Kaynağın entropisi, kaynağın ürettiği sembollerin bir çoğunu birden sayısal olarak ifade etmek istediğimizde her bir kaynak sembolü için ihtiyaç duyacağımız ortalama ikili basamak sayısını anlatır, bkz. Shannon (1948). Kanalın kapasitesi ise kanalın bir çok kullanımını koordine ederek ikili basamakları iletirken hata olasılığını bize verilecek herhangi bir seviyenin altına düşürebilecek olduğumuz durumda her bir kanal kullanımında iletilebileceğimiz en yüksek ikili basamak sayısını anlatır, bkz. Shannon (1948).

Kanal kapasitesi ve kaynak entropisi kavramları bir mühendislik problemi olarak haberleşmenin, sayısal haberleşme sistemleri kullanılarak çözülmesine katkı sağladıkları gibi, tasarım ile ilgili tercihlerde de gösterici olmaya devam etmektedirler. Fakat hata olasılığı ile ve gecikme ile ilgili ihtiyaçların asimptotik olarak giderilmesi her durumda kabul edilebilir olmamaktadır. Bu durumda verili bir hata olasılığı seviyesi ve gecikme için kanal kullanımı başına iletilebilecek en yüksek ikili basamak sayısını hesaplamak için yaygın olarak kullanılan yöntem mutual information random variable’a normal approximation uygulamaktır, bkz. Strassen (1962); Hayashi (2009); Polyanskiy vd. (2010); Tomamichel & Tan (2013); Moulin (2017).

Kanal kodlaması probleminde her bir kanal kullanımında iletilebilecek ikili basamak sayısını belirlemenin yanında, sıkça çalışılan başka bir klasik problem de sabit bir hızda —her bir kanal kullanımında iletilecek ikili basamak sayısı sabit olduğunda— hata olasılığının gecikme, yani blok uzunluğu, ile üssel azalma hızının, yani error exponentin belirlenmesidir. Kanal kapasitesinin altındaki tüm hızlarda error exponentı karakterize etmek hala çözülememiş bir problemidir; ama pratik olarak önemli bir çok kanalda belirli bir kritik hız değeri R_{crit} ile kanal kapasitesi arasındaki tüm hızlarda error exponent değeri bilinmektedir, bkz. Gallager (1965); Shannon vd. (1967a,b); Haroutunian (1968).

Kanal kapasitesi ile ilgili problemlerde mutual information random variable’a normal approximation uygulayarak elde edilen sonuçlara benzer bir şekilde error exponent sonuçlarını da iyileştirmek mümkündür. Fakat bu iyileştirmeler ya kanala özel değişkenler cinsinden sunulmuş ve ispatlanmıştır Elias (1955); Shannon (1959); Dobrushin (1962); yada Gallager fonksiyonları veya Haroutunian formülasyonu türünden ifade edilmiştir, Altuğ & Wagner (2014b,a, 2021). Hata olasılığı ve gecikme ile ilgili kısıtların daha güçlü olduğu durumda error exponent sonuçlarının iyileştirilmeleri ile elde edilen sonuçlar, mutual information random variable’a normal approximation uygulayarak elde edilenlerden daha doğru bir şekilde optimal performansı öngörebilmektedir. Şekil 1’de binary simetrik

kanalda belirli bir hata olasılığında erişilebilecek hızlara dair sonlu optimizasyon problemlerinin sayısal çözümleri ile elde edilmiş sınırla ile birlikte normal approximationı mutual information random variable'a ve error exponent hesaplarına uygulayarak elde edilebilecek kestirimler sunulmakta.



Şekil 1: Geçiş olasılığı (crossover probability) $\delta = 0.11$ olan Binary simetrik kanalda (BSC) $P_e = 10^{-6}$ hata olasılığı ile ulaşılabilir hızla dair sınırlar ve farklı metodlar ile öngörülen değerler.

Bu projedeki amaçlarımızdan biri bu tür iyileştirmelerin yapılabileceği bir çerçeveyi Augustin bilgisini kullanarak önermektir. Bu çerçeve bize daha önce elde edilmiş sonuçları aynı yaklaşımın farklı problemlerdeki ifadeleri olarak görme imkanı sağlayacağı gibi yeni sonuçlar elde etmemize de imkan verecek. Örneğin Augustin bilgisine dayanarak önerdiğimiz bu çerçeve bize kanal kapasitesinin üzerindeki haberleşme hızlarında hata olasılığının bire yaklaşma hızının subexponential terimini iyileştirme imkanı da verecek.

Augustin bilgi ölçülerinin kanal kodlarının performansını karakterize etmekte oynadığı kritik rolü dikkate alarak sönümlü kanallarda ve bir takım soyut kanallarda Augustin bilgi ölçülerinin karakterize edilmesine dair daha önce tartışılmamış bir takım teknik problemleri de inceleyeceğiz.

2 LİTERATÜR ÖZETİ

Küre sıkıştırma sınırı (KSS/The Sphere Packing Bound), noktadan noktaya iletişim sağlayan kodların hata olasılığının blok uzunluğu ile en fazla üssel olarak azalabileceğini ve bu üssün Küre Sıkıştırma Üssünden (KSÜ'den/ Shere Packing Exponent'dan) daha büyük olamayacağını gösterir, bkz Shannon vd. (1967a). Rassal kodlama sınırı (RKS) kanal kapasitesinin altındaki tüm hızlarda hıza bağlı olarak değişen Rassal Kodlama Üssünün (RSÜ /Random Coding Exponent) erişilebileceğini gösterir, bkz Gallager (1965). Bir çok kanalda KSÜ ile RSÜ, kanal tarafından belirlenen bir kritik hızdan daha büyük tüm hızlarda birbirlerine eşittirler.

Gallager (1965) rassal kodlama sınırını pratik sistemlerin bir çoğu için geçerli olan sınırlı kabuller altında ispatlamıştır. Bu sonuca karşılık gelen imkansızlık sonucunun, yani KSS'nin, sonlu girdi kümeleri olan durağan kanallar için Shannon vd. (1967a); Haroutunian (1968) ve gürültü modeli verilen bazı özel kanallar için Shannon (1959); Ebert (1966); Richters (1967); Wyner (1988); yapılan ispatları yaygın şekilde bilinmektedir. Augustin (1969) KSS'yi çarpım kanallarında kanalın durağan veya sonlu girdi kümeli olduğunu kabul etmeden (possibly non-stationary product channels with arbitrary input sets) ve Augustin (1978) KSS'yi maliyet kısıtlı belleksiz kanallarda (cost constrained memoryless channels), maliyet işlevini sınırlı (bounded cost function) kabul ederek ispatlamıştır. Nakiboğlu (2019a, 2020b) bu sonuçları ikincil hata terimlerini iyileştirerek modern jargon ile sunmuştur. Bounded cost function hipotezi karesel maliyet işlevi sınırlı olmadığı için Shannon (1959); Ebert (1966); Richters (1967)'de incelenen çeşitli Gauss kanallarda geçerli değildir. KSS'yi maliyet kısıtlı belleksiz kanallarda sınırlı maliyet işlevi kabulünü yapmadan ispatlayan ilk çalışma Nakiboğlu (2020b).

Gallager (1965)'de RSÜ ve Shannon vd. (1967a)'de KSÜ, Gallager fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir. Gallager (1965) Gaussian kanal gibi maliyet kısıtlı (cost constrained) kanallarda Gallager fonksiyonlarını standard olmayan bir Lagrange multiplier metodu ile modifiye etmiştir. ve bu şekilde elde edilen RSÜ'nün Shannon (1959)'un Gaussian kanallar için elde ettiği RSÜ'ye eşit olduğunu göstermiş. Ebert (1966) çok girdili ve çok çıktılı Gaussian kanallarda, Richters (1967) ise non-coherent hızlı sönümlü Gaussian kanallarda RSÜ'nün ve KSÜ'nün bu şekilde elde edilebileceğini göstermiştir. Gallager (1965)'in tarif ettiği Lagrange multiplier tekniğinin doğru uygulandığı her durumda elde edilebilecek en iyi RSÜ'yü vereceğini söyleyebilmemiz ise ancak Nakiboğlu (2019a)'da Augustin–Legendre kapasitesi ile Renyi–Gallager kapastesinin bir birine eşit olduğunun ispatlanması ve Nakiboğlu (2020b)'de KSS'nin constrained Augustin kapasite cinsinden ifade edilerek ispatlanmasından sonra olmuştur.

Gallager (1965) ve Shannon vd. (1967a)'den başlayarak RSÜ ve KSÜ'nün ifade edilmelerinde tercih edilen araç Gallager fonksiyonları — veya onlara özdeş olan Renyi bilgi ölçüleri Sibson (1969); Nakiboğlu (2019b) — olmuştur. Fakat Augustin (1978)'nin bounded cost fonksiyonları için, Nakiboğlu (2020b)'nin hem unbounded cost fonksiyonlarında hem de empiri dağılım üzerindeki convex constraintler için gösterdiği üzere, Gallager fonksiyonları yerine Augustin bilgi ölçüleri ile çalışıldığında constrained durumlarda RSÜ ve KSÜ'yü hesaplamak için yapılması gereken tek değişiklik kod üzerindeki constrainti Augustin kapasiteyi tanımlayan optimizasyon problemine uygulamaktır.¹ Bu şekilde hem KSÜ ve RSÜ'nün tanımları Lagrange multiplierlardan arındırılarak sadeleşmektedir, bkz Nakiboğlu (2020b). Bazı durumlarda KSS ve RKS'nin ispatları da daha sade bir hal almaktadır.

RKS'nin Gallager (1965)'de ve KSS'nin Shannon vd. (1967a); Haroutunian (1968); Augustin (1969)'de sunulan genel ispatlarından önce Elias (1955), Shannon (1959), ve Dobrushin (1962) bazı özel kanal modellerini incelemişler ve hata olasılığının blok uzunluğu ile azalışında sadece üssel fonksiyonda blok uzunluğunun çarpımı olan sabiti, yani RKÜ'yü ve KSÜ'yü, belirlemekle kalmayıp bu üssel fonksiyonun çarpımı olan fonksiyonunda blok uzunluğunun hıza bağlı bir kuvveti olarak belirlemişlerdir. Bu kuvvet KSÜ'nün haberleşme hızına göre türevi cinsinden ifade edilebilmektedir. Bu gözlemlerin erişilebilirlik kısmı rafine RKS olarak adlandırılabilir ve Altuğ & Wagner (2014a)'de daha genel olarak ispatlanmıştır. Bu sonuçların imkansızlık kısmı rafine KSS olarak adlandırılır ve constant composition kodlar için Altuğ & Wagner (2014b)'de Bahadur & Rao (1960)'ı kullanarak ispatlanmıştır. Vazquez-Vilar (2021) Gaussian kanallar için benzer sonuçları Augustin ortalaması kavramı yardımıyla ve eyer noktası yaklaşımını kullanarak ispatlamıştır. Bahadur & Rao (1960) ve eyer noktası yaklaşımına kıyasla daha mütevazı bir araç olan Berry-Esseen teoremini kullanarak rafine KSS'nin elde edilmesi bu projenin temel amaçlarından biridir. Eyer noktası yaklaşımı ve Bahadur & Rao (1960), kullanılarak elde edilen sonuçların sadece blok uzunluğu cinsinden exponentı ve onun çarpımı olan blok uzunluğunun kuvvetini değil bunları başındaki sabiti de belirlemesi beklenmektedir, Vazquez-Vilar (2021)'de olduğu üzere.

Wolfowitz (1957)'de kanal kapasitesinden yüksek olan hızlarda hata olasılığının bire yaklaştığı, Arimoto (1973)'de hücünün gönderilen mesajı hatasız olarak belirleme olasılığının blok uzunluğu ile üssel olarak azaldığı ispatlanmıştır. Arimoto (1973)'de sunulan sonucu daha sade ispatları Augustin (1978) ve Sheverdyaev (1982)'de sunulmuştur. Arimoto (1973) da belirlenen imkansızlık sonucu ile uyumlu bir erişilebilirlik sonucu Dueck & Korner (1979) tarafından sunul ve discrete memoryless kanalların strong converse exponentı belirlenmiştir. Strong converse exponent Gaussian kanallar için Oohama (2017)'da, constant composition kodlar için Mosonyi & Ogawa (2021)'da belirlen-

¹Bu gözlem yakın zamanda Verdú (2021) tarafından da yapılmıştır.

miştır. KSS’de olduğu gibi strong converse sonuçlarında da Berry-Esseen teoremini ve Augustin bilgi ölçülerini kullanarak bir iyileştirme yapmak bu projenin bir diğer amacıdır.

Bir kanal için KSS’yi ispatlamak ve KS’y hesaplamak çoğu zaman birlikte zlen ve bir biri ile alakalı fakat bir birinden ayrı problemlerdir. Nakiboğu (2020b) KSS’yi pratik sistemlerin bir çoğu için geçerli olan sınırlı kabuller altında ispatlamıştır ve bu yönü ile KSS için Gallager (1965)’in rassal kodlama sınırı için yaptığını yapmıştır. Fakat Nakiboğu (2020b) sadece iki özel kanal modeli için daha önce de bilinen KS ifadelerini —açıklayıcı örnekler olarak— tekrar türetmiştir. Uygulamada karşılaşılan bir çok kanal için KS’nn ne olduğunu hesaplamak ve hata olasılığının blok uzunluğu ile azalışını belirlemek, hem (en iyi haberleşme sistemlerinin performanslarını nitelediği için) pratik olarak anlamlı hem de kuramsal olarak önemli problemlerdir. Alıcıda kanal durum bilgisinin olduğu hızlı sönümlü kanallar sıkça kullanılan ve hem Nakiboğu (2020b) hem de Gallager (1965)’in hipotezlerini sağlayan kanallardır. Bu tür sönümlü kanalların da Augstin bilgi ölçüleri ile verili kanal durum bilgisiyle elde edilen bileşen kanalların Augustin bilgi ölçüleri arasındaki ilişkileri inceleyerek, en azından bazı modeller için KS ve RK için yeni parametrik ifadeler elde etmek ve bu ifadeler yardımıyla sönümlenmenin kanal kodlaması problemi zerndeki etkisini üzerinde yeni niteliksel gözlemler yapabilmek projenin amaçları arasındadır.

Augustin (1978) Augustin bilgisi ve Augustin ortalaması kavramlarını input dağılımının sadece sonlu sayıda noktada pozitif olan probability mass fonksiyonu olduğu durumlar için tanımlamıştır. Nakiboğu (2019a)’de Augustin bilgisinin daha genel input dağılımları için de tanımlanabileceğini ve bu daha genel tanımlar için elde edilen Augustin kapasitesinin ve Augustin merkezinin sadece sonlu sayıda noktada pozitif olan probability mass fonksiyonları için elde edilenler ile aynı olduğunu ispatlamıştır. Fakat Nakiboğu (2019a)’da Augustin ortalamasının Augustin operatorünün sabit noktası olarak karakterize edilmesi gibi sonuçlar sadece input dağılımının sonlu sayıda noktada pozitif olan bir probability mass fonksiyonu olduğu durumlar için ve Gaussian kanallarda Gaussian input dağılımları için ispatlanmıştır. Verd (2021) Augustin ortalamasını Augustin operatorünün sabit noktası olarak tanımlayabileceğini iddea etmiştir, ama böyle bir sabit noktanın varlığı mevzu bahis soyut modelde bir tanım değil ispatlanması gereken bir savdır. Augustin ortalamasının varlığı, tekliği, ve Augustin operatörünün sabit noktası olarak karakterize edilmesi projenin bir diğer temel amacıdır.

3 GEREÇ VE YÖNTEM

Sonuçları ve tanımları bir belirsizliğe neden olmadan anlatabilmek için sıkça kullanacağımız bazı terimleri tanımlayarak başlamakata fayda var. Sonsuz elemana sahip olabilecek bir $\mathcal{X}$ kümesi üzerinde sadece sonlu sayıda noktaya pozitif bir olasılık atayan olasılık kütle fonksiyonlarından oluşan kümeyi $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ ile göstereceğiz. $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ measuable uzayındaki tüm olasılık measurelarını $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, tüm sonlu measureları ise $\mathcal{M}^+(\mathcal{X})$ ile göstereceğiz. Eğer $\nu(\mathcal{E}) = 0$ olan tüm $\mathcal{E} \in \mathcal{X}$ 'ler için aynı zamanda $w(\mathcal{E}) = 0$ sağlanıyorsa, ν , w için bir referans measureıdır. Bu ilişki $w \prec \nu$ ile gösterilir. $w \sim \nu$ ilişkisi ancak ve ancak hem $w \prec \nu$ hem de $\nu \prec w$ doğru olduğunda geçerlidir.

3.1 Augustin Bilgi Ölçüleri ve Exponent Fonksiyonları

3.1.1 Renyi Divergence

Aynı measurable uzay $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ 'da tanımlı iki olasılık dağılımı w ve q arasındaki Renyi divergence herhangi bir pozitif derece α için şu şekilde tanımlanır:

$$D_\alpha(w \| q) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \ln \int \left(\frac{dw}{d\nu}\right)^\alpha \left(\frac{dq}{d\nu}\right)^{1-\alpha} d\nu & \text{if } \alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty) \\ \int \frac{dw}{d\nu} \left[\ln \frac{dw}{d\nu} - \ln \frac{dq}{d\nu} \right] d\nu & \text{if } \alpha = 1 \end{cases}$$

burada ν , hem w hem de q için ortak bir referans measureıdır, yani hem $w \prec \nu$ hem de $q \prec \nu$ sağlanmaktadır.

Conditional Renyi divergence ise $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$, $Q : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$, ve $\alpha \in \mathbb{R}_+$ için

$$D_\alpha(W \| Q | p) := \sum_x p(x) D_\alpha(W(x) \| Q(x)),$$

şeklinde tanımlanır. Eğer tüm x değerleri için $Q(x) = q$ doğruysa conditional renyi divergence $D_\alpha(W \| Q | p)$ yerine $D_\alpha(W \| q | p)$ kullanılarak da gösterilir.

W ve Q 'nin $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ 'den $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ 'a prabability kernelleri olduğu durumda, yani $W, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y} | \mathcal{X})$ olduğunda, conditional Renyi divergence $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ için de benzer şekilde tanımlanır, bkz. Nakiboğlu

(2019a).

$$D_\alpha(W \| Q | p) := \int D_\alpha(W(x) \| Q(x)) p(dx).$$

3.1.2 Augustin Bilgisi, Ortalaması, Kapasitesi, ve Merkezi

Augustin (1978); Csiszár (1995); Nakiboğlu (2019a)'da herhangi bir kanal $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$, input dağılımı $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$, ve $\alpha \in \mathbb{R}_+$ için Augustin bilgisi $I_\alpha(p; W)$ şu şekilde tanımlanır,

$$I_\alpha(p; W) := \inf_{q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})} D_\alpha(W \| q | p).$$

Bu infimum değerine erişebilen sadece bir olasılık dağılımı vardır. Bu olasılık dağılımına Augustin ortlaması denir ve Augustin ortalaması $q_{\alpha,p}$ ile gösterilir, bkz. Nakiboğlu (2019a):

$$I_\alpha(p; W) = D_\alpha(W \| q_{\alpha,p} | p). \quad (1)$$

Herhangi bir $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ için Augustin kapasitesi şu şekilde tanımlanır:

$$C_{\alpha,\mathcal{A}} := \sup_{p \in \mathcal{A}} I_\alpha(p; W).$$

Augustin bilgisi ve kapasitesi tanımlarının bir sonucu olarak $C_{\alpha,\mathcal{A}}$ şu şekilde yazılabilir

$$C_{\alpha,\mathcal{A}} = \sup_{p \in \mathcal{A}} \inf_{q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})} D_\alpha(W \| q | p).$$

Tüm convex $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 'lar için bu ifadedeki supremum ile infimumun yerleri sonucu değiştirmeden değiştirilebilir, bkz Nakiboğlu (2019a):

$$\sup_{p \in \mathcal{A}} \inf_{q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})} D_\alpha(W \| q | p) = \inf_{q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})} \sup_{p \in \mathcal{A}} D_\alpha(W \| q | p).$$

Ayrıca $C_{\alpha,\mathcal{A}}$ 'nin sonlu olduğu tüm convex $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ 'larda

$$C_{\alpha,\mathcal{A}} = \sup_{p \in \mathcal{A}} D_\alpha(W \| q_{\alpha,\mathcal{A}} | p)$$

eşitliğini sağlayan bir Augustin merkezi $q_{\alpha,\mathcal{A}} \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ vardır, bkz. Nakiboğlu (2019a).

Eğer $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ aynı zamanda $(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ 'den $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ 'a bir prabability kerneli tanımlıyorsa Augustin bilgisi sadece $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ için değil aynı zamanda $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ için de tanımlanabilir. Maliyet

kısıtlı durumlarda, yani $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ve $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ maliyet kısıtları tarafından belirlenen kümeler olduğunda, $C_{\alpha,\mathcal{A}} = C_{\alpha,\mathcal{A}}$ eşitliğinin sağlandığı Nakiboğlu (2019a)'da ispatlanmıştır.

$\alpha=1$ için Renyi divergence Kullback–Leibler divergence'a, Augustin bilgisi mutual informationa, Augustin kapasitesi kanal kapasitesine eşittir: $D_1(w\|q) = D(w\|q)$, $I_1(p;W) = I(p;W)$, ve $C_{1,\mathcal{A}} = C_{\mathcal{A}}$.

3.1.3 Exponent Fonksiyonları

Herhangi bir $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ (veya $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$) ve herhangi bir pozitif hız değeri R için Küre sıkıştırma üssü (KSÜ), Augustin kapasitesi cinsinden şu şekilde tanımlanır

$$E_{sp}(R, \mathcal{A}) := \sup_{\alpha \in (0,1)} \frac{1-\alpha}{\alpha} (C_{\alpha,\mathcal{A}} - R) \quad \forall R \in \mathbb{R}_+$$

Augustin kapasitesi $C_{\alpha,\mathcal{A}}$, α 'nın azalmayan bir fonksiyonu olduğu için kanal kapasitesinden büyük olan tüm R değerleri için KSÜ sıfırdır:

$$E_{sp}(R, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall R \geq C_{1,\mathcal{A}}.$$

Bu tanım KSÜ'nün Galager fonksiyonları cinsinden Shannon vd. (1967a)'de verilen tanımına ve kısıtlı (constraint) durumlarda için Haroutunian formu cinsinden Csiszár & Körner (2011)'da verilen tanımına özdeştir, bkz Nakiboğlu (2020b). Aynı şekilde Shannon (1959); Wyner (1988)'da elde edilen KSÜ ifadeleri de bu tanımın Gaussian ve Poisson modelleri için elde edilmiş bir özel halleridir, bkz Nakiboğlu (2020b). Bu tanım ile yapılan genel bir KSS ispatı Nakiboğlu (2020b)'da sunulmuştur.

Benzer şekilde Rassal kodlama üssü (RKÜ) de Augustin kapasitesi cinsinden tanımlanır:

$$E_r(R, \mathcal{A}) := \sup_{\alpha \in [0.5,1)} \frac{1-\alpha}{\alpha} (C_{\alpha,\mathcal{A}} - R) \quad \forall R \in \mathbb{R}_+.$$

Kanal kapasitesinden büyük olan tüm R değerleri için RKÜ sıfırdır:

$$E_r(R, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall R \geq C_{1,\mathcal{A}}.$$

Strong converse üssü (SCÜ) de Augustin kapasitesi cinsinden tanımlanır:

$$E_{sc}(R, \mathcal{A}) := \sup_{\alpha \in (1,\infty)} \frac{1-\alpha}{\alpha} (C_{\alpha,\mathcal{A}} - R) \quad \forall R \in \mathbb{R}_+.$$

Kanal kapasitesinden düşük tüm R değerleri için SCÜ sıfırdır:

$$E_{sc}(R, \mathcal{A}) = 0 \quad \forall R \leq C_{1, \mathcal{A}}.$$

Constant composition kodların performanlarını incelemek için $\mathcal{A} = \{p\}$ olduğu duruma odaklanacağız; bunun sonucu olarak da $C_{\alpha, \mathcal{A}} = I_{\alpha}(p; W)$ eşitliği sağlanacak. Agustin bilgisinin α 'nın sürekli şekilde türevlenebilir bir fonksiyonu olması özelliğini kullanarak, constant composition kodlar için tanımlı KSÜ $E_{sp}(R, p)$ 'nin ve RKÜ $E_{sc}(R, p)$ 'nin α cinsinden parametrik ifadelerini elde edilebilir. Bir sonraki bölümde tanımlayacağımız eğik kanal kavramı cinsinden verilen bu ifadeleri o bölümün sonunda bulabilirsiniz.

3.2 Hypothesis testing ve eğik olasılık dağılımları/kanallar

3.2.1 Eğik olasılık dağılımları

Aynı measurable uzay üzerinde tanımlı iki olasılık measure w ve q için $D_{\alpha}(w \| q)$ 'nin sonlu olduğu tüm durumlarda eğik olasılık dağılımı w_{α}^q , hem w hem de q için referans measureı olan bir ν cinsinden şu şekilde tanımlanır

$$\frac{dw_{\alpha}^q}{d\nu} = \left(\frac{dw}{d\nu}\right)^{\alpha} \left(\frac{dq}{d\nu}\right)^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)D_{\alpha}(w \| q)}.$$

Eğik olasılık dağılımlarının en önemli özelliği carpım şeklinde verilen olasılık dağılımları arasında yapıldıklarında bu formu korumalarıdır. Daha açık olarak ifade edecek olursak, w ve q

$$\begin{aligned} w &= w_1 \otimes \cdots \otimes w_n & w_j &\in \mathcal{P}(\mathcal{Y}_j) \quad \forall j \\ q &= q_1 \otimes \cdots \otimes q_n & q_j &\in \mathcal{P}(\mathcal{Y}_j) \quad \forall j \end{aligned}$$

formunda olduğunda $D_{\alpha}(w \| q)$ sonlu olduğu her durumda

$$w_{\alpha}^q = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$$

$v_j = \{w_j\}_{\alpha}^{q_j}$ için sağlanmaktadır.

3.2.2 Hypothesis testing ve eğik olasılık dağılımları

Bu çarpım özelliğini kullanarak hypothesis testing problemindeki birinci ve ikincil hata olasılıklarının exponentlarının aynı anda α 'nın $(0, 1)$ aralığındaki herhangi bir değeri için $D_1(w_\alpha^q \| w)$ ve $D_1(w_\alpha^q \| q)$ değerlerini alabileceklerini ve bu şekilde parametrik olarak belirlenen eğrinin error exponent trade-offunu mutlak olarak belirlediği Shannon vd. (1967a)'da gösterilmiştir. Shannon vd. (1967a) bu sonucu elde etmek için sadece Chebyshev eşitsizliğini kullanmıştır. Csiszár & Longo (1971) eğik olasılık dağılımı w_α^q için Strassen (1962)'in sonuçlarını kullanarak bu sonuçları iyileştirmeyi ve sadece üssel terimleri değil onların çarpımı olan terimleri ve hatta sabitleri belirlemeyi denemiştir. Maalesef bir işlem hatasından dolayı Csiszár & Longo (1971) doğru sonuçları elde edememiştir. Yakın zamanda Csiszár & Longo (1971)'da işlem hatası yapılmasa elde edilecek sonuçları Vazquez-Vilar vd. (2018) eyer noktası yaklaşımı ile elde etmiştir. Nakiboğlu (2020a), hypothesis problemi için Csiszár & Longo (1971) yaptığı gibi eğik olasılık dağılımı w_α^q 'yu kullandık ve Berry–Esseen teoremini yardımıyla sadece optimum exponent trade-offu değil aynı zamanda bu üssel fonksiyonların çarpımı olan subexponential fonksiyonları da belirledik. Csiszár & Longo (1971)'da da belirtildiği üzere bu teknik birincil hata olasılığı sıfıra gitmediği durumlarda da kullanılabilir, Cheng & Nakiboğlu (2020)'da sunulan sonuçlar da bu gözleme dayanmaktadır.

3.2.3 Eğik Kanallar

Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}_+$, kanal $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$, ve output dağılımı $q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ için eğik kanal W_α^q , input kümesi $\{x \in \mathcal{X} : D_\alpha(W(x) \| q) < \infty\}$ 'dan $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 'ya bir fonksiyon olarak şu şekilde tanımlanır

$$\frac{dW_\alpha^q(x)}{d\nu} := \left(\frac{dW(x)}{d\nu} \right)^\alpha \left(\frac{dq}{d\nu} \right)^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)D_\alpha(W(x) \| q)}$$

Egik kanal kavramı Augustin ortalamasını karakterize etmekte kullanılan Augustin operatörü kavramının tanımlanmasında da kullanılmaktadır. Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}_+$, kanal $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$, ve input dağılımı $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ için Augustin operatörü $T_{\alpha,p}(\cdot) : \mathcal{Q}_{\alpha,p} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ ve onun domaini $\mathcal{Q}_{\alpha,p} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\alpha,p} &:= \{q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y}) : D_\alpha(W \| q | p) < \infty\}, \\ T_{\alpha,p}(q) &:= \sum_x p(x) W_\alpha^q(x) \quad \forall q \in \mathcal{Q}_{\alpha,p}. \end{aligned}$$

Augustin ortalaması $q_{\alpha,p}$ 'ı tanımlayan eşitlik (1)'dir. Fakat Augustin ortalamasının aynı zamanda

Augustin operatörünün bir sabit noktasıdır ve $q_p \sim q_{\alpha,p}$ ilişkisini sağlar, bkz. Nakiboğlu (2019a):

$$\mathbf{T}_{\alpha,p}(q_{\alpha,p}) = q_{\alpha,p} \quad q_p := \sum_x p(x) W(x).$$

Öte taraftan $q_p \prec q$ ve $\mathbf{T}_{\alpha,p}(q) = q$, ilişkilerinin ikisini aynı anda sağlayan tek olasılık dağılımı Augustin ortalaması $q_{\alpha,p}$ 'dir, bkz. Nakiboğlu (2019a).

Augustin ortalamasının Augustin operatörünün sabit noktası olması Augustin ortlamasını karakterize etmekte kullanıldığı gibi $E_{sp}(R, p)$ ve $E_{sc}(R, p)$ 'nin parametrik ifadelerinin elde edilmesinde ve §3.1.3'de verilen tanımların Haroutunian form kullanılarak yapılan tanımlara denk olduğunu gösterilmesinde de kullanılmaktadır.

KSÜ α 'nın $(0, 1)$ aralığındaki değerleri kullanılarak aşağıdaki parametrik ifade ile karakterize edilebilir

$$E_{sp}(R, p) = D_1(W_{\alpha,p} \| W | p) \quad (2)$$

$$R = D_1(W_{\alpha,p} \| q_{\alpha,p} | p) \quad (3)$$

$$= I_{\alpha}(p; W_{\alpha,p}), \quad (4)$$

burara $W_{\alpha,p} = W_{\alpha}^{q_{\alpha,p}}$ 'dir. Ayrıca KSÜ eğrisinin eğimi de $\frac{dE_{sp}(R,p)}{dR} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$ eşitliğini sağlamaktadır, Nakiboğlu (2020b).

SCÜ ise α 'nın $(1, \infty)$ aralığındaki değerleri kullanılarak aşağıdaki parametrik ifade ile karakterize edilebilir

$$E_{sc}(R, p) = D_1(W_{\alpha,p} \| W | p) \quad (5)$$

$$R = D_1(W_{\alpha,p} \| q_{\alpha,p} | p) \quad (6)$$

$$= I_{\alpha}(p; W_{\alpha,p}). \quad (7)$$

3.3 Hızlı Sönümlü Kanallar

Bazı durumlarda kanal outputu y 'nin istatistiksel davranışı kanalın inputu x yanında istatistiksel dağılımı kanal inputu x 'den bağımsız olan bir kanal durumu h 'ye bağlı olabilir. Kanal outputu y , kanal durumu h , ve kanal inputu x 'in sonlu kümelerle ait olduğu durumda bu tür kanalların davranışı inputdan bağımsız bir kanal durumu dağılımı $g \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ ve kanal durumuna (sönümlenme

parametresine) bağı bir kanal $W : \mathcal{X} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ cinsinden şu şekilde özetlenebilir

$$\mathbf{P}[H_1^n = h_1^n, Y_1^n = y_1^n | X_1^n = x_1^n] = \prod_{t=1}^n g(h_t) W(y_t | x_t, h_t) \quad \forall h_t \in \mathcal{H}, y_t \in \mathcal{Y}, x_t \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Kanal durumunun alıcı tarafından bilindiği fakat gönderici tarafından bilinmediği durumlarda bu tür kanallara alıcıda kanal durum bilgisi olan hızlı sönümlü kanallar denir. Kanal durum bilgisini de bir kanal çıktısı olarak değerlendirdiğimizde bu tür kanalları sönümleme etkisi olmayan kanallar olarak da düşünebiliriz:

$$\mathbf{P}[H_1^n = h_1^n, Y_1^n = y_1^n | X_1^n = x_1^n] = \prod_{t=1}^n V(h_t, y_t | x_t) \quad \forall h_t \in \mathcal{H}, y_t \in \mathcal{Y}, x_t \in \mathcal{X}, n \in \mathbb{Z}_+$$

$V : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H} \times \mathcal{Y})$ aşağıdaki gibi tanımlandığı takdirde

$$V(h, y | x) = g(h) W(y | x, h). \quad (8)$$

Nakiboğlu (2020b)'de belirtildiği üzere alıcıda kanal durum bilgisi olan sönümlü kanallar $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{H}$ kümeleri sonlu sayıda elemana sahip kümeler olmadığında da sönümlü olmayan memoryless bir kanal olarak değerlendirilebilir.

Nakiboğlu (2019a)'nin sonucu olarak her $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ için aşağıdaki eşitliği sağlayan bir Augustin mean $s_{\alpha,p}$ vardır:

$$I_\alpha(p; V) = D_\alpha(V \| s_{\alpha,p} | p).$$

Nakiboğlu (2019a)'nin sonucu olarak $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ için ve her h değeri için aşağıdaki eşitliği sağlayan bir Augustin mean $q_{\alpha,p}(h)$ vardır:

$$I_\alpha(p; W(\cdot, h)) = D_\alpha(W(\cdot, h) \| q_{\alpha,p}(h) | p).$$

Sönümlü kanallar ile ilgili cevaplamaya çalışacağımız temel sorulardan biri hangi durumlarda

$$s_{\alpha,p}(h, y) = g_\alpha(h) q_{\alpha,p}(y | h). \quad (9)$$

ilişisini sağlayan bir $g_\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ olduğudur. $\alpha = 1$ olduğunda bu eşitliğin $g_1 = g$ için sağlandığı kolaylıkla görülmektedir. α 'nın diğer değerleri için bu soruyu benzer bir çarpanlara ayırma özelliğinin eğik kanallarda geçerli olması için hem gerekli hem de yeterli olan bir koşul bularak cevaplayacağız. Bu sorunun cevabını kullanarak da hızlı sönümlü binary simetrik kanallar için KSÜ'yü hesaplayıp, sönümlü olmayan benzer bir binary simetrik kanalın KSÜ'sü ile karşılaştıracaktır.

3.4 Banach–Sach Özelliği ve Quasi-Convexity: Tıkızlığa bir alternatif

Nakiboğlu (2019a)’da Augustin (1978)’deki Augustin bilgisi tanımı probability kernelleri yardımıyla $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ ’den $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ ’e genelleştirilmiştir. Fakat Augustin ortalamasının varlığı, tekliği, ve Augustin operatörünün sabit noktası olarak karakterize edilmesi daha önceden yapılmamıştır. Verdú (2021) efektif olarak Augustin operatörünün $q \sim q_p$ olan bir sabit noktası olduğu savını Augustin ortalamasının tanımı olarak kullanmıştır; ama bu savı ispatlamamıştır. Böyle bir sabit noktanın olduğu her durumda bu noktanın Augustin ortalamasına eşit olacağı ise (Nakiboğlu, 2019a, Lemma 13)’ün ispatı için kullanılan argümanların doğal bir sonucudur. Fakat böyle bir sabit noktanın varlığı bir tanım değil ancak bir ispat ile geçerli kabul edilebilecek bir savdır.

Nakiboğlu (2019a) ve Augustin (1978) detayları farklı olsada tıkızlık (compactness) kavramını kullanarak Augustin operatörünün bir sabit noktası olduğunu ve sabit noktanın Augustin ortalamasına eşit olduğunu göstermiştir.

Cheng & Nakiboğlu (2021)’da tıkızlık kavramını kullanmadan Augustin ortalamasının varlığını göstermek için Banach–Sachs özelliğinden (Bogachev, 2007, Cor. 4.7.17) özelliğinden faydalandık. Fakat Banach–Sachs özelliği sadece uniformly convex uzaylarda geçerli bir olduğu ilk önce Augustin bilgisini tanımlayan optimizasyon problemini $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ ’den α ’ya bağlı olarak seçilen bir τ için bir $L^\tau(q_p)$ ’ya taşıdık:

$$L^\tau(q_p) := \{f : \|f\|_\tau < \infty\},$$

$$\|f\|_\tau := \left(\int |f(y)|^\tau q_p(dy) \right)^{1/\tau}.$$

Burada τ ’yu Renyi divergence $D_\alpha(w \| q)$ ’nin q cinsinden sağladığı convexliği optimizasyon probleminin taşındığı uzayda da sağlamasını garanti edecek şekilde seçtik. Böylece

$$\lim_j D_\alpha(W \| q_j | p) = I_\alpha(p; W)$$

eşitliğini sağlayan her $\{q_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ için Banach–Sachs özelliğinin öngördüğü convergent ortalamanın da optimum değere ulaştığını lower-semi-continuity’yi de kullanarak gösterdik.

Bu şekilde var olduğunu ispatladığımız Augustin ortalaması $q_{\alpha,p}$ ’nin Augustin operatörünün sabit noktası olacağını göstermek için ise önce eğik Augustin operatörleri $T_{\alpha,p}^\beta(\cdot)$ ’ları tanımladık. Sonra da eğik Augustin operatörlerinin Augustin operatörü ile aynı sabit noktalara sahip olduklarını gösterdik.

Daha sonra da aşağıda verilen monotonluk özelliğininin

$$D_{\alpha}(W \| q | p) - D_{\alpha}\left(W \| T_{\alpha,p}^{\beta}(q) \middle| p\right) \geq \frac{\beta(2-\beta(\alpha \vee 1))}{2} \|T_{\alpha,p}(q) - q\|^2.$$

hem $\alpha \in (0, 1)$ ve $\beta \in (0, 1]$ olduğunda, hem de $\alpha \in (1, \infty)$ ve $\beta \in (0, 1 \wedge \frac{1}{\alpha-1})$ olduğunda geçerli olduğunu gösterdik.

4 BULGULAR

4.1 Rafine Küre Sıkıştırma Sınırı

$I_1(p; W)$ 'den küçük $I_0(p; W)$ 'dan büyük tüm hız değerleri için, tüm codewordlerinin kompozisyonu p olan, n uzunluğunda ve R hızındaki olan tüm kodların, teknik bir koşul sağlandığında hata olasılıklarının, p , W , ve R tarafından belirlenen ve R ile sürekli bir şekilde değişen bir A sabiti için

$$P_{\mathbf{e}}^{(n)} \geq A n^{-0.5(1-E'_{sp}(R,p))} e^{-nE_{sp}(R,p)} \quad (10)$$

şeklinde² sınırlandığı ispatlandı, (Nakiboğlu, 2020a, Theorem 5.1). (10)'de verilen eşitsizliğin geçerli olması için gerekli teknik koşul herhangi bir (p, W, R) üçlüsü için yeterince büyük tüm n değerlerinde sağlanmaktadır ve bu koşul eğer herhangi bir hız değerinde sağlanırsa ondan büyük tüm hız değerlerinde de sağlanmaktadır.

Renyi simetrik kanallar için rafine KSS (Nakiboğlu, 2020a, Theorem 5.8)'da, Gaussian kanallar için rafine KSS (Nakiboğlu, 2020a, Theorem 5.10)'de sunulmuştur. Kanalların özelliklerine bağlı bir takım teknik farklılıkları içermekle birlikte bu rafine KSS sonuçlarının ispatları aynı temel adımları uygulamaktadır:

- (i) Her bir mesajın hata olasılığının ona karşılık gelen codewordun output dağılımı ile Augustin ortalaması/merkezi kullanılarak elde edilen çarpım dağılımı arasındaki hypothesis testing probleminin hata olasılıkları ile ilişkilendirilmesi.
- (ii) Hypothesis testing probleminin hata olasılığını eğik kanal ve Berry–Essen teoremi yardımıyla sınırlandırılması.

Bu adımları uygulayarak rafine KSSleri Bahadur & Rao (1960) veya eyer noktası yaklaşımı gibi sonuçları kullanmadan da ispatlanabileceğini göstermiş olduk. (10)'de verilen A sabitini iyileştirmek için Csizsár & Longo (1971) önerdiği gibi Strassen (1962)'in sonuçları eğik kanal kavramı ile birlikte kullanılabilir.

Son olarak bu problemde Augustin ortalaması/merkezi kavramının oynadığı kritik rolün altını bir kez daha çizelim. Kanal kodlarının hata olasılıklarını hypothesis testing probleminin hata olasılıklarına taşıırken Augustin ortalaması/merkezi yerine başka bir dağılımı kullanılırsa, rafine KSSler

² $E'_{sp}(R, p) = \frac{d}{d\tau} E_{sp}(\tau, p) \Big|_{\tau=R}$.

elde edilemez. Bu etki sadece elde ettiğimiz asimptotik ifade ilgili de değildir, böyle bir yanlış seçim sonlu blok uzunluklarında fark yaratmaktadır, bkz. (Vazquez-Vilar, 2021, Şekil 4).

4.2 Rafine Strong Converse Sınırı

$I_1(p; W)$ 'den büyük tüm hız değerleri için, tüm codewordlerinin kompozisyonu p olan, n uzunluğunda ve R hızındaki olan tüm kodların hata olasılıklarının, p , W , ve R tarafından belirlenen ve R ile sürekli bir şekilde değişen bir A sabiti için

$$P_e^{(n)} \geq 1 - An^{-0.5(1-E'_{sc}(R,p))} e^{-nE_{sc}(R,p)} \quad (11)$$

şeklinde³ sınırlandığı Cheng & Nakiboğlu (2020)'de ispatlandı. SCE'nin türevi $R = I_1(p; W)$ 'da sıfır olan ve monotone olarak artarak bir değere ulaşan bir fonksiyon olduğu için (11), en azından $I_1(p; W)$ 'a yeterince yakın olan hızlarda (12)'da verilen Arimoto sınırını iyileştirmektedir.

$$P_e^{(n)} \geq 1 - e^{-nE_{sc}(R,p)}. \quad (12)$$

Rafine KSSlerde yapıldığı gibi rafine SCS'de Renyi simetrik kanallarda ve Gaussian kanallarda da ispatlanabilir. Ayrıca (11)'deki A sabiti de Csiszár & Longo (1971) önerdiği şekilde Strassen (1962)'in sonuçlarını eğik kanal kavramı ile birlikte uygulayarak iyileştirilebilir. Ama bu iyileştirmelerin ötesinde (11)'in Arimoto sınırını iyileştiren ilk sonuç olduğunu belirtmekte fayda var.

4.3 Hızlı Sönümlü Kanallarda KSS ve Eğik Kanalın Çarpanlarına Ayrılabilmesi

Yıldız & Nakiboğlu (2022)'de hızlı sönümlü kanallarda (9)'da anlatılan çarpanlara ayrılmanın gerçekleşebilmesi için bir yeter şartın benzer bir çarpanlara ayrılma özelliğinin eğik kanal için geçerli olması olduğu ispatlandı ve eğik kanal için çarpanlara ayrılma özelliğinin geçerli olması için hem gerekli hem de yeterli olan bir koşul elde edildi: (8) ile verilen herhangi bir discrete hızlı sönümlü kanal $V: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H} \times \mathcal{Y})$ ve input dağılımı $p \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ için eğer

$$V_{\alpha,p}(h, y|x) = g_\alpha(h) W_{\alpha,p}(y|x, h) \quad \forall h, y \text{ ve } \forall x : p(x) > 0 \quad (13)$$

³ $E'_{sc}(R, p) = \frac{d}{d\tau} E_{sc}(\tau, p) \big|_{\tau=R}$.

eşitliğini sağlayan bir $g_\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ varsa bu g_α

$$s_{\alpha,p}(h, y) = g_\alpha(h) q_{\alpha,p}(y|h). \quad \forall h, y \quad (14)$$

eşitliğini de sağlar. Ayrıca (13) eşitliğini sağlayan bir $g_\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ ancak ve ancak

$$D_\alpha(W(x, h) \| q_{\alpha,p}(h)) = a(x) + b(h) \quad \forall h \text{ ve } \forall x : p(x) > 0 \quad (15)$$

eşitliğini sağlayan bir $a : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ var olduğunda var olur.

(15)'de verilen koşul her kanal ve her input dağılımı için sağlanmasa da uygulamalar açısından önemli bazı durumlarda sağlanmaktadır. Örneğin tüm h değerleri için $W(\cdot, h)$ kanalının Agusutin kapasitesi aynı input dağılımı p tarafından sağlanıyorsa,

$$I_\alpha(p; W(\cdot, h)) = C_{\alpha,h} \quad \forall h : g(h) > 0. \quad (16)$$

(15) aşağıdaki g_α ifadesi için

$$g_\alpha(h) = \left(\sum_{\tilde{h}} g(\tilde{h}) e^{\frac{\alpha-1}{\alpha} C_{\alpha,\tilde{h}}} \right)^{-1} g(h) e^{\frac{\alpha-1}{\alpha} C_{\alpha,h}} \quad (17)$$

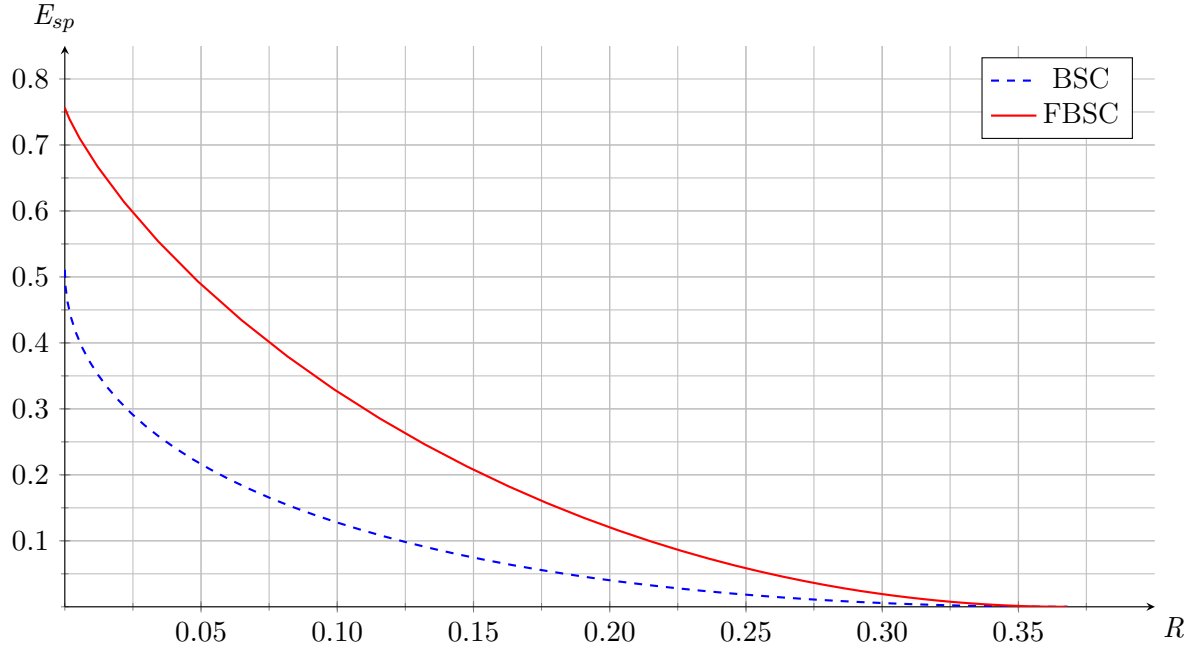
geçerli olmaktadır. Bu durumda KSS için şu parametrik ifade elde edilebilmektedir:

$$E_{sp}(R, V) = D_1(g_\alpha \| g) + D_1(W_{\alpha,p} \| W | p g_\alpha), \quad (18)$$

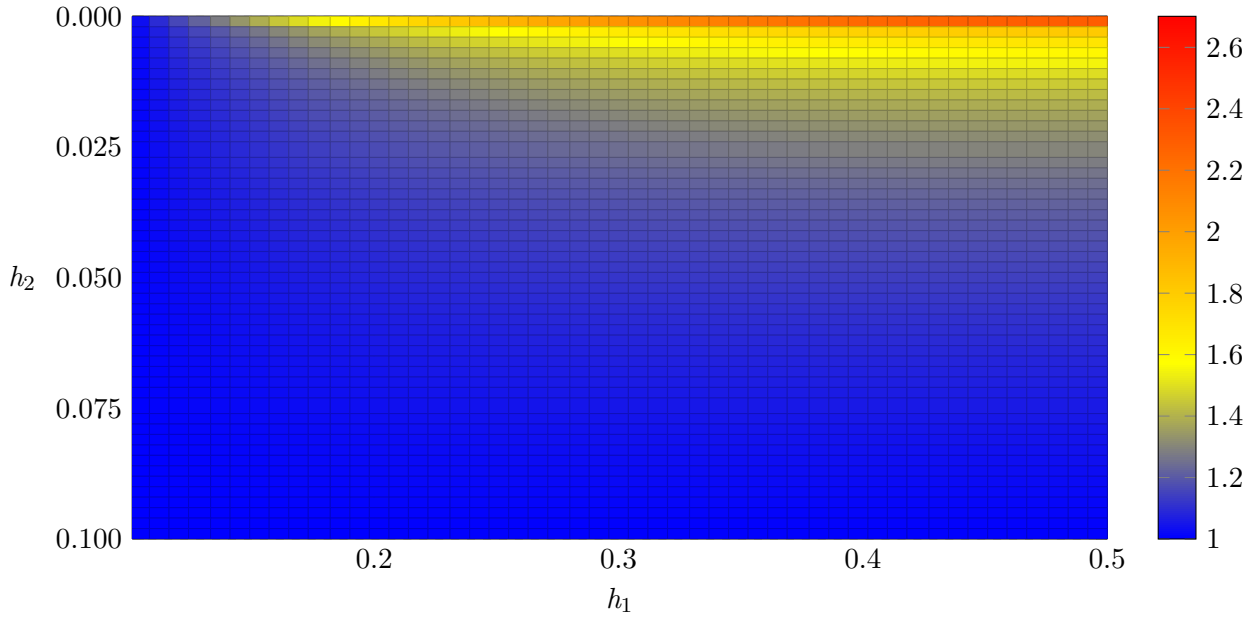
$$R = D_1(W_{\alpha,p} \| q_{\alpha,p} | p g_\alpha), \quad (19)$$

$$= I_1(p g_\alpha; W_{\alpha,p}) \quad (20)$$

(16)'de verilen hipotezi hem hızlı sönümlü Binary Erasure Kanalı (FBEC) hem de hızlı sönümlü Binary Simetrik Kanal (FBSC) sağlamaktadır. Sönümlenmenin KSS üzerindeki niteliksel etkisini anlamının bir yolu aynı kanal kapasitesine sahip BEC ve FBEClerin KSSlerini veya aynı kanal kapasitesine sahip BSC ve FBSClerin KSSlerini karşılaştırmaktır. Yıldız & Nakiboğlu (2022)'de aynı kanal kapasitesine sahip BEC ve FBEClerin KSSlerinin de aynı olacağı gösterilmiştir. FBSClerin KSSleri ise onlar ile aynı kanal kapasitesine sahip BSClerin KSSlerinden her zaman daha büyük olmaktadır, Şekil 2 belirli bir BSC, FBSC çiftinin farklı hızlardaki KSS değerlerini göstermektedir. Şekil 3 ise FBSC KSSsinin belirli bir hızdaki değerinin BSC KSSsine oranını olası h değerlerinin fonksiyonu olarak göstermektedir.



Şekil 2: Crossover olasılığı 0.1 olan BSC ile $g(0) = 0.531$ ve $g(0.5) = 0.469$ olan FBSC'nin KSSleri.



Şekil 3: Crossover olasılığı 0.1 olan BSC ile aynı kanal kapasitesine ($C = 0.368$) ve sadece iki farklı h değerine sahip FBSClerin $R = 0.131$ daki KSSlerinin BSC'nin aynı hızdaki KSSsine oranı.

4.4 Augustin Ortalaması ve Augustin Operatörü

Daha önce sadece sonlu sayıda noktaya pozitif olasılık veren olasılık dağılım fonksiyonları için ve belirli kanallardaki belirli input dağılımları için var olduğu ispatlanmış olan Augustin ortalamasının varlığı ve tekliği countably generated output σ -cebirine sahip olan tüm kanallarda sonlu bir Augustin bilgisi değerine sahip olan tüm input dağılımları için ispatlandı. Ayrıca bir input dağılımının yarattığı output dağılımının o input dağılımının Augustin ortalaması için bir referans measure olduğu, yani $q_{\alpha,p} \prec q_p$, gösterildi, bkz. (Cheng & Nakiboğlu, 2021, Lemma 5).

Bir çok durumda $W(x) \prec q_p$ p -a.s. sağlanmaktadır. Fakat bazı kanallarda ve input dağılımlarında bu özellik geçerli değildir. Böyle durumlarda W , Radon–Nikodym teoremi yardımıyla

$$W(x) = W_{\sim}(x) + W_{\perp}(x)$$

şeklinde, $W_{\sim}(x) \prec q_p$ ve $W_{\perp}(x) \perp q_p$ koşullarını sağlamak kaydıyla tek bir şekilde yazılabilir. Bu şekilde belirlenen $W_{\sim}(x)$ 'leri kullanarak $q_{\tilde{p}} \in \mathcal{M}^+(\mathcal{Y})$ şu şekilde tanımlanır

$$\frac{dq_{\tilde{p}}}{dq_p} := \mathbf{E}_p \left[\frac{dW_{\sim}(\mathbf{X})}{dq_p} \right], \quad (21)$$

$W(x) \prec q_p$ p -a.s. özelliğinin sağlandığı her durumda $q_{\tilde{p}} = q_p$ dir, örneğin $I_1(p; W) < \infty$ olduğunda.⁴ Daha önce incelenmiş tüm durumlarda $q_{\alpha,p} \sim q_p$ geçerlidir. Fakat bu özelliğin her zaman geçerli olmayabileceği ve her durumda geçerli olan ilişkinin $q_{\alpha,p} \sim q_{\tilde{p}}$ olduğu gösterildi. Ayrıca Augustin ortalaması $q_{\alpha,p}$ 'nin

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\alpha,p}(q_{\alpha,p}) &= q_{\alpha,p}, \\ D_{1 \vee \alpha}(q_{\alpha,p} \| q) &\geq D_{\alpha}(W \| q | p) - I_{\alpha}(p; W) \geq D_{1 \wedge \alpha}(q_{\alpha,p} \| q) \quad \forall q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y}) \end{aligned}$$

ilişkilerini sağladığı ve hem $q_{\tilde{p}} \prec q$ hem de $\mathbf{T}_{\alpha,p}(q) = q$ özelliklerini sağlayan tek $q \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 'nin $q = q_{\alpha,p}$ olduğu ispatlandı, bkz. (Cheng & Nakiboğlu, 2021, Lemma 7).

⁴ $I_1(p; W)$ sonsuz olduğu bir çok durumda da hem $W(x) \prec q_p$ p -a.s. özelliğinin hem de bunun bir sonucu olarak $q_{\tilde{p}} = q_p$ sağlanır.

5 SONUÇ

Nakiboğlu (2020a)'de belirli simetri kabulleri altında ispatlanan rafine KSS'nin bu simetri kabulleri geçerli olmadığında da geçerli olacağı ön görülmektedir. Bu durumda rafine KSS'yi ispatlayabilmek için $E_{sp}(R, p)$ 'nin optimum p etrafındaki değişiminin kullanılarak Tomamichel & Tan (2013)'de kullanılan türden bir grid oluşturulması bu problemin çözümü için yeterli olacaktır.

Sönümlü kanalların incelenmesindeki temel motivasyonlardan biri de sönümlü Gaussian kanallar için KSÜ'nün hesaplanması ve bu şekilde Shin & Win (2009); Zhang vd. (2013) gibi çalışmalarda elde edilen erişilebilirlik sonuçlarının elde edilebilecek en iyi sonuçlar olup olmadığının belirlenmesiydi. Gaussian kanallar Gaussian input dağılımları için (15)'de verilen özelliği sağlamamaktadır, dolayısıyla Yıldız & Nakiboğlu (2022)'nin sonuçları Gaussian kanallara uygulanamamaktadır. Bu problemin çözümü için faydalı olacak bir ara problem Gaussian kanallarda Gaussian input dağılımları uygulandığında eğik kanal için kanal outputu y 'nin dağılımının kanal bilgisi h ve kanal inputu x verili olduğunda Gaussian olacağı bir sönümleme dağılımı olup olmadığının belirlenmesidir.

Kaynakça

- Altuğ, Y., & Wagner, A. B. 2014a. “Refinement of the Random Coding Bound”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 60(10), 6005–6023.
- Altuğ, Y., & Wagner, A. B. 2014b. “Refinement of the Sphere-Packing Bound: Asymmetric Channels”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 60(3), 1592–1614.
- Altuğ, Y., & Wagner, A. B. 2021. “On Exact Asymptotics of the Error Probability in Channel Coding: Symmetric Channels”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 67(2), 844–868.
- Arimoto, S. 1973. “On the converse to the coding theorem for discrete memoryless channels (Corresp.)”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 19(3), 357–359.
- Augustin, U. 1969. “Error estimates for low rate codes”. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 14(1), 61–88.
- Augustin, U. 1978. *Noisy Channels*. Habilitation thesis, Universität Erlangen-Nürnberg.
- Bahadur, R. R., & Rao, R. R. 1960. “On Deviations of the Sample Mean”. *The Annals of Mathematical Statistics*, 31(4), 1015–1027.
- Bogachev, V. I. 2007. *Measure Theory*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Cheng, H.-C., & Nakiboğlu, B. 2020. “Refined Strong Converse for the Constant Composition Codes”. In *2020 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, (pp. 2149–2154).
- Cheng, H.-C., & Nakiboğlu, B. 2021. “On the Existence of the Augustin Mean”. In *2021 IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, (pp. 1–6).
- Csiszár, I. 1995. “Generalized cutoff rates and Rényi’s information measures”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(1), 26–34.
- Csiszár, I., & Körner, J. 2011. *Information theory: coding theorems for discrete memoryless systems*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Csiszár, I., & Longo, G. 1971. “On the error exponent for source coding and for testing simple statistical hypotheses”. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, 6, 181–191.
- Dobrushin, R. 1962. “Asymptotic Estimates of the Probability of Error for Transmission of Messages over a Discrete Memoryless Communication Channel with a Symmetric Transition Probability Matrix”. *Theory of Probability & Its Applications*, 7(3), 270–300.
- Dueck, G., & Körner, J. 1979. “Reliability function of a discrete memoryless channel at rates above capacity (Corresp.)”. *IEEE Transactions on Information Theory*, 25(1), 82–85.

- Ebert, P. M. 1966. *Error Bounds For Parallel Communication Channels*. Technical report 448, Research Laboratory of Electronics at Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. (<http://hdl.handle.net/1721.1/4295>).
- Elias, P. 1955. "Coding For Two Noisy Channels". In Proceedings of Third London Symposium of Information Theory, (pp. 61–74). London: Butterworth Scientific.
- Gallager, R. G. 1965. "A simple derivation of the coding theorem and some applications". IEEE Transactions on Information Theory, 11(1), 3–18.
- Haroutunian, E. A. 1968. "Bounds for the Exponent of the Probability of Error for a Semicontinuous Memoryless Channel". Problems of Information Transmission, 4(4), 29–39.
- Hayashi, M. 2009. "Information Spectrum Approach to Second-Order Coding Rate in Channel Coding". IEEE Transactions on Information Theory, 55(11), 4947–4966.
- Mosonyi, M., & Ogawa, T. 2021. "Divergence Radii and the Strong Converse Exponent of Classical-Quantum Channel Coding With Constant Compositions". IEEE Transactions on Information Theory, 67(3), 1668–1698.
- Moulin, P. 2017. "The Log-Volume of Optimal Codes for Memoryless Channels, Asymptotically Within a Few Nats". IEEE Transactions on Information Theory, 63(4), 2278–2313.
- Nakiboğlu, B. 2019a. "The Augustin Capacity and Center". Problems of Information Transmission, 55(4), 299–342.
- Nakiboğlu, B. 2019b. "The Rényi Capacity and Center". IEEE Transactions on Information Theory, 65(2), 841–860.
- Nakiboğlu, B. 2020a. "A simple derivation of the refined sphere packing bound under certain symmetry hypotheses". Turkish Journal Of Mathematics, 44(3), 919–948.
- Nakiboğlu, B. 2020b. "The Sphere Packing Bound for Memoryless Channels". Problems of Information Transmission, 56(3), 201–244.
- Oohama, Y. 2017. "The optimal exponent function for the additive white Gaussian noise channel at rates above the capacity". In 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), (pp. 1053–1057). Aachen, Germany.
- Polyanskiy, Y., Poor, H. V., & Verdú, S. 2010. "Channel Coding Rate in the Finite Blocklength Regime". IEEE Transactions on Information Theory, 56(5), 2307–2359.
- Richters, J. S. 1967. *Communication over fading dispersive channels*. Technical report 464, Research Laboratory of Electronics at Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA. (<http://hdl.handle.net/1721.1/4279>).

- Shannon, C. E. 1948. “A mathematical theory of communication”. Bell System Technical Journal, The, 27(3 and 4), 379–423 and 623–656.
- Shannon, C. E. 1959. “Probability of error for optimal codes in a Gaussian channel”. The Bell System Technical Journal, 38(3), 611–656.
- Shannon, C. E., Gallager, R. G., & Berlekamp, E. R. 1967a. “Lower bounds to error probability for coding on discrete memoryless channels. I”. Information and Control, 10(1), 65–103.
- Shannon, C. E., Gallager, R. G., & Berlekamp, E. R. 1967b. “Lower bounds to error probability for coding on discrete memoryless channels. II”. Information and Control, 10(5), 522–552.
- Sheverdyaev, A. Y. 1982. “Lower bound for error probability in a discrete memoryless channel with feedback”. Problems of Information Transmission, 18(4), 5–15.
- Shin, H., & Win, M. Z. 2009. “Gallager’s exponent for MIMO channels: a reliability-rate tradeoff”. IEEE Transactions on Communications, 57(4), 972–985.
- Sibson, R. 1969. “Information radius”. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 14(2), 149–160.
- Strassen, V. 1962. “Asymptotische abschätzungen in Shannons Informationstheorie”. In Trans. Third Prague Conf. Inf. Theory, (pp. 689–723).
- Tomamichel, M., & Tan, V. Y. F. 2013. “A Tight Upper Bound for the Third-Order Asymptotics for Most Discrete Memoryless Channels”. IEEE Transactions on Information Theory, 59(11), 7041–7051.
- Vazquez-Vilar, G. 2021. “Error Probability Bounds for Gaussian Channels Under Maximal and Average Power Constraints”. IEEE Transactions on Information Theory, 67(6), 3965–3985.
- Vazquez-Vilar, G., Fabregas, A. G. i., Koch, T., & Lancho, A. 2018. “Saddlepoint Approximation of the Error Probability of Binary Hypothesis Testing”. In 2018 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), (pp. 2306–2310).
- Verdú, S. 2021. “Error Exponents and α -Mutual Information”. Entropy, 23(2).
- Wolfowitz, J. 1957. “The coding of messages subject to chance errors”. Illinois Journal of Mathematics, 1(4), 591–606.
- Wyner, A. D. 1988. “Capacity and error exponent for the direct detection photon channel. I”. IEEE Transactions on Information Theory, 34(6), 1449–1461.
- Yıldız, M. F., & Nakiboğlu, B. 2022. “Augustin Information Measures on Fading Channels Under Certain Symmetry Hypothesis”. submitted to 2022 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT).

Zhang, J., Matthaiou, M., Karagiannidis, G. K., Wang, H., & Tan, Z. 2013. “Gallager’s Exponent Analysis of STBC MIMO Systems over $\eta-\mu$ and $\kappa-\mu$ Fading Channels”. IEEE Transactions on Communications, 61(3), 1028–1039.

TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü:	Dr. Öğr. Üyesi BARIŞ NAKİBOĞLU
Proje No:	119E053
Proje Başlığı:	Renyi/Augustin Bilgi Ölçüleri Ve Küre Sıkıştırma Sınırı İçin Augustin Yöntemi
Proje Türü:	3501 - Kariyer
Proje Süresi:	30
Araştırmacılar:	
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ORTA DOĞU TEKNİK Ü. MÜHENDİSLİK F. ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ B.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	15/08/2019 - 15/02/2022
Onaylanan Bütçe:	466514.0
Harcanan Bütçe:	127112.89
Öz:	Augustin bilgi ölçüleri ve bunların kanal kodlaması problemindeki optimal performansı karakterize etmekte kullanımı dört problem üzerinden incelenmiştir. Memoryless kanallarda constant composition kodlar için kodun empirik dağılımının mutual informationı kodun hızından yüksek olduğu durumlarda rafine küre sıkıştırma sınırı ispatlanmıştır. İspat farklı codeswordlere karşılık gelen output dağılımları ile Augustin ortalamasının çarpımı ile elde edilen output dağılımı arasındaki hypothesis testing problemi için eğiklik parametresinin kodun haberleşme hızı tarafından belirlenen bir değerinde Berry-Esseen teoreminin kullanılması fikrine dayanmaktadır. Yöntemde küçük değişiklikler yaparak rafine küre sıkıştırma sınırı Renyi-simetrik kanallar ve Gauss kanalları için de ispatlanmıştır. Memoryless kanallarda constant composition kodlar için kodun empirik dağılımının mutual informationı kodun hızından düşük olduğu durumlarda daha önce bilinen tüm sonuçları iyileştiren bir rafine strong converse sınırı ispatlanmıştır. Küçük değişikliklerle rafine strong converse sınırı Renyi-simetrik kanallarda ve Gauss kanallarda da ispatlanabilmektedir. Alıcıda kanal durum bilgisi olan hızlı sönümlü kanallar için sönümlü kanalın eğik kanalının eğik bir kanal durum dağılımı ile verili bir kanal durumunun eğik kanalının çarpımı olarak ifade edilebilmesi için gerekli ve yeterli olan bir koşul belirlendi. Input dağılımı ve kanal ile ilgili sıkça kullanılan tüm continuous modellerce sağlanan hipotezler altında Augustin ortalamasının varlığı ve tekliği kanıtlandı, Augustin ortalaması Augustin operatorünün sabit nokta olarak karakterize edildi.

Abstract:	Augustin information measures and their use in characterizing the performance of optimal performance in channel coding problem is investigated through four problems. For constant composition codes on stationary memoryless channels with a rate less than the mutual information of corresponding to the composition of the codes a refined sphere packing bound is derived. Derivation employs the Berry-Esseen theorem in the hypothesis testing problem between the output distribution corresponding to different codeswords and the product distribution corresponding to the Augustin mean, at a tilting parameter value determined by the rate of the code. With minor modifications refined sphere packing bounds are derived for codes on Renyi's symmetric channels and Gaussian channels. For constant composition codes on stationary memoryless channels with a rate greater than the mutual information of corresponding to the composition of the codes a refined strong converse bound is derived, which improves up on all the previously known results. With minor modifications refined strong converse bounds can be derived for codes on Renyi's symmetric channels and Gaussian channels. For fast fading channels with channel state information at the receiver a necessary and sufficient condition is determined for the tilted channel of the fading channel be the product of a tilted distribution of the channel state and the tilted channel corresponding to the given channel state. The existence of a unique Augustin mean is proved and it is characterized as fixed point of the Augustin operator under rather mild hypothesis on input measures and channels that are satisfied by all of the commonly used continuous models.
Anahtar Kelimeler:	Augustin bilgisi/ortalaması/kapasitesi/merkezi, küre sıkıştırma sınırı/üssü, strong converse sınırı
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Evet
Projeden Yapılan Yayınlar:	1- A simple derivation of the refined sphere packing bound under certain symmetry hypotheses (Makale - İndeksli Makale), 2- Refined Strong Converse for the Constant Composition Codes (Bildiri - Uluslararası Bildiri - Sözlü Sunum), 3- On the Existence of the Augustin Mean (Bildiri - Uluslararası Bildiri - Sözlü Sunum),